

A barreira à compreensão humana do MARS (The Barrier to Human Understanding of MARS)

Ler um modelo MARS como taxas unitárias, contribuições de valor e ajustes

Foundations • The Valuation Engineer

William Bert Craytor • October 1, 2026

Version 1.2.0

DOI: [10.67330/qmnctv78](https://doi.org/10.67330/qmnctv78)

Este é um suplemento ao departamento de Fundamentos, não uma entrada conceitual. Seu título se refere a uma barreira que o editor passou a reconhecer ao longo de anos de observação indireta: avaliadores que interpretam um coeficiente de regressão sem dificuldade para na lista de termos-chave que um programa MARS exibe, pois nada nessa lista se parece com uma taxa. Os quatro artigos estatísticos que seguem este suplemento (*Expectativa Condicional*, *Viés de Variável Omitida*, *Endogeneidade* e *Identificação de Parâmetros*) abordam a taxa que uma regressão atribui a uma característica. A própria modelagem da Revista utiliza splines de regressão adaptativa multivariada (MARS; Friedman 1991) ¹, que relatam não uma taxa por característica, mas uma por intervalo, e o caminho desde o que um programa MARS imprime até a tabela de taxas que um avaliador pode defender tem uma etapa na qual as tabelas criadas manualmente dão errado. Este suplemento apresenta o caminho, a etapa e um programa que o percorre e verifica seu próprio trabalho.

Definição formal. Em um modelo MARS, o valor ajustado é uma interceptação mais uma soma de termos, sendo cada um deles um coeficiente multiplicado pelo produto das funções dobradiças das características. O valor ajustado é a estimativa do preço feita pelo modelo. Para uma característica, com as demais mantidas fixas, trata-se de uma série de segmentos retos. Os pontos onde os segmentos se encontram são os nós. O gráfico da contribuição do valor da característica ao longo de seu intervalo é o *gráfico da variável*. Sua inclinação em cada intervalo é a *taxa*: a variação no valor ajustado por unidade da característica nesse intervalo; a *contribuição de valor* de uma quantidade da característica é a soma dos termos do modelo para essa característica naquela quantidade; no exemplo, todos esses termos são zero em 1.200 pés quadrados, portanto a contribuição é medida a partir desse ponto e é negativa abaixo dele; um modelo não precisa ter tal quantidade, e apenas as diferenças entre as contribuições, que são ajustes, têm significado; e o *ajuste* de um imóvel comparável para o imóvel objeto da avaliação é o valor adicionado à contribuição do imóvel comparável para torná-la igual à do imóvel objeto da avaliação, que é a soma, nos intervalos entre as duas quantidades, da taxa multiplicada pela largura. A taxa assim definida é a do modelo; ela é interpretada como a taxa que o mercado paga somente depois que o modelo for aceito como uma representação justa das vendas, e as entradas que se seguem a este suplemento tratam de quando essa aceitação é justificada.

¹MARS is a registered trademark of Minitab, LLC. It is used in this Journal as the name of the statistical method introduced by Friedman (1991), and the software referred to is the R package *earth*, whose notation this Journal follows: hinges are written $h(x - t)$ and $h(t - x)$ and models are shown as *earth* prints them. Salford's MARS writes the same functions as numbered basis functions, $BF1 = \max(0, X - t)$ and so on, and differs from *earth* in such details of notation, not in the method.

Por que este suplemento existe

Um avaliador que se encaixa em um modelo MARS, no earthUI (Craytor 2026) ou diretamente no pacote R earth (Milborrow 2024a), recebe uma lista de termos como estes:

(Intercept)	1520000
h(1200-gla)	-600
h(gla-1200)	1000
h(gla-2000)	-250
h(gla-2800)	-650

Ninguém relata isso. O que é incluído na tabela de vendas é o ajuste: a contribuição de valor do imóvel objeto da avaliação menos a do imóvel comparável. As taxas por pé quadrado são discutidas no relatório, como uma etapa para justificar o modelo MARS. O caminho entre os termos impressos e esses números é curto, mas há uma etapa em que as tabelas elaboradas manualmente apresentam erros, e todo o sentido de usar um modelo se perde se os números que ele produz não puderem ser explicados a um revisor.

A versão simples: quatro faixas, quatro taxas

Uma regressão linear que inclui a área habitável como um termo linear fornece uma taxa única para ela em todo o mercado; é isso que as regressões na avaliação tradicional fazem, e é o que se entende por “regressão comum” neste suplemento. O MARS permite que a taxa varie nos casos em que as vendas indicam essa variação. No mercado litorâneo do exemplo, a área habitável pode valer \$600 por pé quadrado até 1.200 pés quadrados, \$1,000 por pé quadrado de 1.200 a 2.000, \$750 de 2.000 a 2.800 e apenas \$100 acima disso. Essa é toda a diferença, e é algo que um corretor entende imediatamente: o mercado paga mais pelo espaço que transforma uma casa pequena em uma casa familiar, menos pelo cômodo seguinte e quase nada pelo espaço além do que os compradores do bairro desejam.

Consideradas as taxas, todo o resto é uma questão de aritmética que um avaliador já realiza. Um imóvel comparável com 1.800 pés quadrados e um imóvel objeto da avaliação com 2.400 têm uma diferença de 600 pés quadrados, e o nó em 2.000 fica entre eles. O ajuste adicionado ao imóvel comparável é o valor ajustado do imóvel objeto da avaliação menos o do comparável, \$2,620,000 – \$2,120,000 = \$500,000, que também corresponde à contribuição da área habitável do imóvel objeto da avaliação menos a do comparável, \$1,100,000 – \$600,000. As taxas explicam isso: a variação ultrapassa 200 pés quadrados em \$1,000, depois 400 pés quadrados em \$750, o que totaliza \$500,000. A figura3 ilustra isso, com ajuste (o preço que o modelo atribui a uma casa com essas características) que varia de \$1,280,000 para 800 pés quadrados — a menor casa nos dados — até cerca de \$3 million para 3.500 pés quadrados — a maior —, sendo que a maior parte do aumento ocorre antes dos 2.800 pés quadrados.

A única taxa que uma reta passando pelos dois pontos poderia ter usado para esse movimento é aquela que os conecta, \$500,000 por 600 pés quadrados, cerca de \$833 por pé quadrado: a *taxa secante* do par, a taxa efetiva, ou combinada, para esse movimento específico: a média das taxas do modelo ponderada pela largura de cada intervalo atravessado. Não se trata de uma das taxas do modelo, e seria uma média diferente para o próximo par. Uma regressão comum, com uma única taxa para área habitável, precisa atender a todos os pares com esse único número; portanto, não consegue reproduzir essas médias par a par; é isso que uma taxa única faz: calcula a média de uma variação que o modelo indica que o mercado apresenta.

Um leitor que parar por aqui já sabe o método: calcule a diferença entre as duas contribuições e, em seguida, explique-a lendo a taxa correspondente a cada intervalo, aplicando a taxa correspondente ao item em questão nesses intervalos e somando os resultados. O que se segue é para o leitor que deseja saber por que as taxas são essas, onde está a única armadilha, o que muda quando os recursos interagem e como um programa verifica a aritmética; a tabela de taxas e os ajustes não se alteram.

A versão refinada: as funções de dobradiça e o sinal que passa despercebido

Chama-se de “gráfico da *variável*” a representação gráfica da contribuição do valor de uma variável ao longo de seu intervalo. Não se trata de uma curva no sentido comum do termo, como algo que se curva suavemente; é um gráfico linear segmentado, reto entre os nós e que se curva apenas neles. O MARS o constrói a partir de *dobradiças*; Friedman (1991) as descreveu como funções de potência truncadas, e “dobradiça” é o nome pelo qual a literatura posterior se estabeleceu (Milborrow, s.d.); Hastie, Tibshirani e Friedman (2009, §9.4) chamam os dois em um nó de “par refletido”.

Definição (dobradiça). Uma dobradiça é uma função de uma variável x com um único ponto de ruptura, chamado de *nó* t , cujo valor é zero de um lado do nó e, do outro lado, igual à distância a partir do nó. Existem duas delas em qualquer nó, uma para cada lado, conforme ilustrado na Figura 1 :

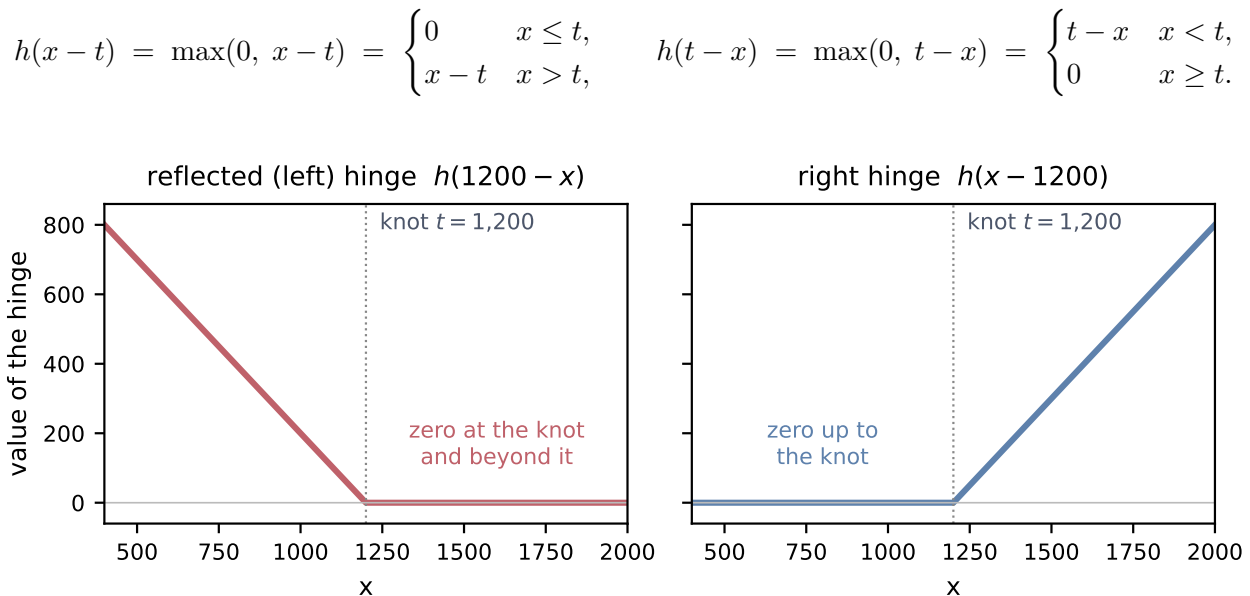


Figure 1: As duas funções dobradiça com o nó em $t = 1,200$: a dobradiça refletida (esquerda) $h(1200 - x)$, decrescente da esquerda para a direita até zero no nó e zero além dele; a dobradiça direita $h(x - 1200)$, zero até o nó e crescente da esquerda para a direita além dele. Essas são as articulações em si; em um modelo, cada uma é multiplicada por um coeficiente, que pode inverter a direção.

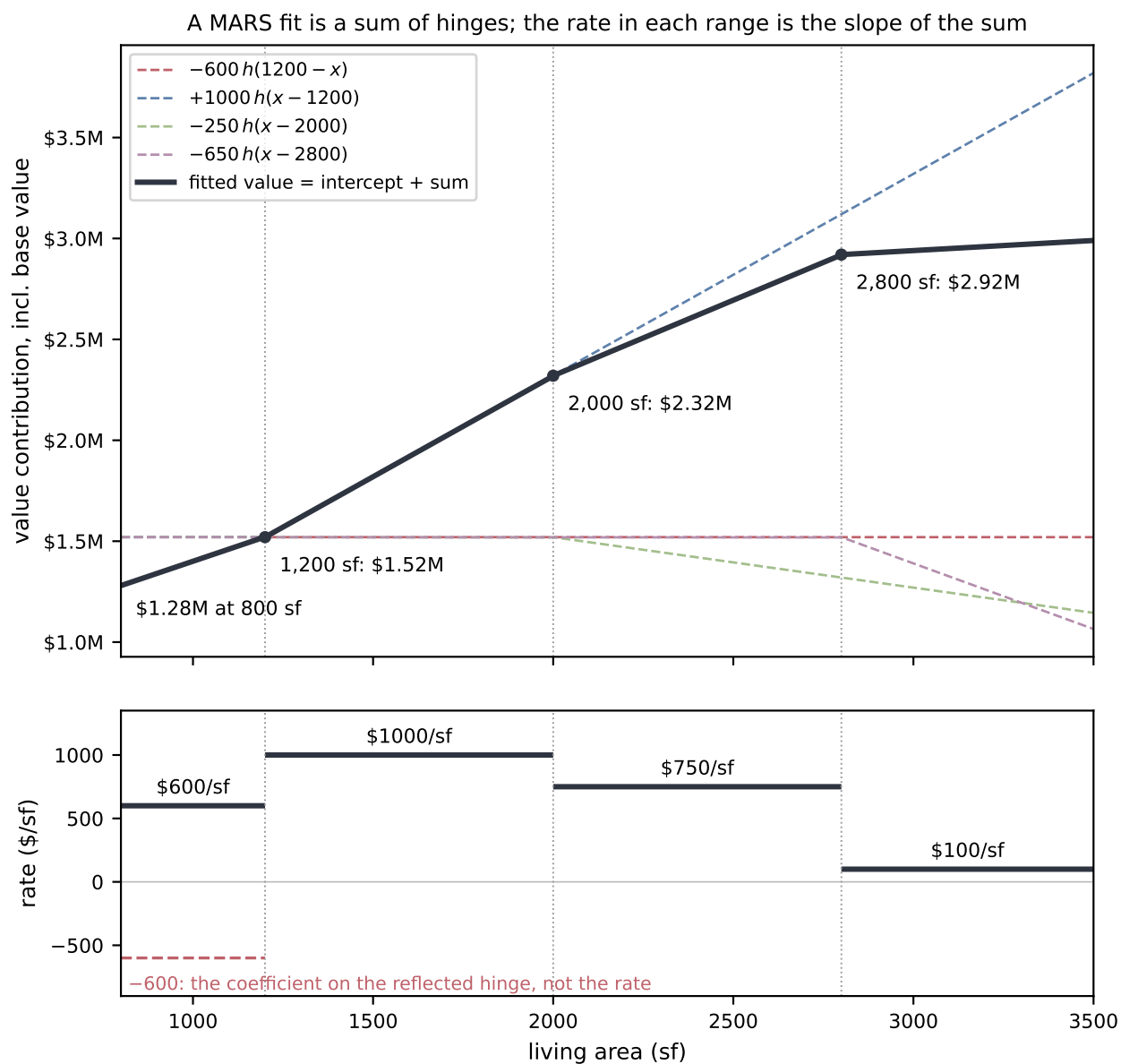
A primeira, $h(x - t)$, é a articulação *direita* : zero até o nó e, além dele, aumentando da esquerda para a direita. A segunda, $h(t - x)$, é a articulação *refletida* (ou esquerda): diminuindo

da esquerda para a direita até o nó, e zero no nó e além dele. Ambas são dobradiças no mesmo sentido; diferem apenas no lado do nó em que são diferentes de zero. Essas direções descrevem as dobradiças em si, traçadas a partir do eixo x na Figura 1, e nada mais. Em um modelo, uma articulação é multiplicada por um coeficiente, que pode ser negativo, e somada a outros termos; assim, um termo construído sobre uma articulação direita pode diminuir da esquerda para a direita e um construído sobre uma articulação refletida pode aumentar, e o gráfico da variável encontra um nó na altura que os outros termos lhe atribuírem. Todas as direções indicadas neste suplemento são lidas da esquerda para a direita. As articulações não são usadas isoladamente. Em um modelo MARS, cada articulação é multiplicada por um coeficiente e os termos são somados; e é a partir desses coeficientes, e não de qualquer articulação isolada, que as inclinações do modelo — as taxas — são calculadas: de forma acumulativa, intervalo por intervalo, sendo que a taxa de cada intervalo é a taxa do intervalo anterior ajustada pelos coeficientes das dobradiças cujo nó se situa entre eles. A articulação é o único elemento básico que o MARS possui para uma única variável; cada curva em um gráfico de variável é um nó de alguma articulação, e cada trecho reto é uma soma de termos que são zero ou lineares nesse ponto. **O ponto a ser levado em conta em tudo o que se segue: o coeficiente de uma articulação não é uma inclinação. Trata-se de um ajuste à inclinação, o valor adicionado, no nó dessa articulação, à inclinação que chega da esquerda.** Lido da esquerda para a direita, um gráfico de variável começa com a taxa de seu primeiro segmento e cada nó ajusta essa taxa pelos coeficientes que ali se encontram. Essa é toda a regra de leitura, e os Teoremas 1 e 2 abaixo são sua prova. O modelo é a interceptação mais cada coeficiente multiplicado por sua articulação, e a taxa em qualquer intervalo é a inclinação dessa soma.

Considere os termos impressos acima; a Figura 2 ilustra cada um deles com sua soma e, abaixo, a taxa em cada intervalo, e a Figura 3 mostra como essas taxas explicam os ajustes entre imóveis comparáveis e imóveis objetos da avaliação. Os nós em 1.200, 2.000 e 2.800 definem quatro intervalos. Em cada intervalo, uma articulação direita está *ativa* se seu nó estiver no intervalo ou à esquerda dele, e uma articulação refletida se seu nó estiver no intervalo ou à direita dele — uma articulação direita atua em todos os intervalos além de seu nó, e uma articulação refletida em todos os intervalos antes dele. A taxa é calculada a partir dos coeficientes das articulações ativas: some os coeficientes das articulações direitas ativas e subtraia os coeficientes das articulações refletidas ativas. A tabela resultante representa a taxa do modelo em cada intervalo, com as demais características mantidas em um conjunto de valores (o programa utiliza os do sujeito); em um modelo sem interações, essa condição não altera nada, e no Caso 2 abaixo ela altera tudo:

intervalo (pés quadrados)	dobradiças ativas	taxa (\$/sf)
abaixo de 1.200	$h(1200 - gla)$ apenas	$-(-600) = +\mathbf{600}$
1.200 a 2.000	$h(gla - 1200)$	$\mathbf{1000}$
2.000 a 2.800	$h(gla - 1200), h(gla - 2000)$	$1000 - 250 = \mathbf{750}$
acima de 2.800	todas as três dobradiças da direita	$1000 - 250 - 650 = \mathbf{100}$

A primeira linha é o passo que está sendo ignorado. Um coeficiente de -600 em uma dobradiça refletida não é uma taxa de $-\$600$ por pé quadrado. A dobradiça $h(1200 - gla)$ mede o quanto uma casa fica aquém dos 1.200 pés quadrados, e -600 vezes essa diferença representa um desconto: $\$240,000$ para uma casa de 800 pés quadrados, reduzindo-se a zero quando atinge 1.200. Cada pé quadrado adicionado elimina $\$600$ do desconto, de modo que a taxa é $+\$600$. (Com um coeficiente positivo, a mesma articulação agrega valor por ser menor, e sua taxa é negativa.) A regra, enunciada uma vez: em um intervalo, a taxa é a soma dos coeficientes das dobradiças ativas à direita *menos* a

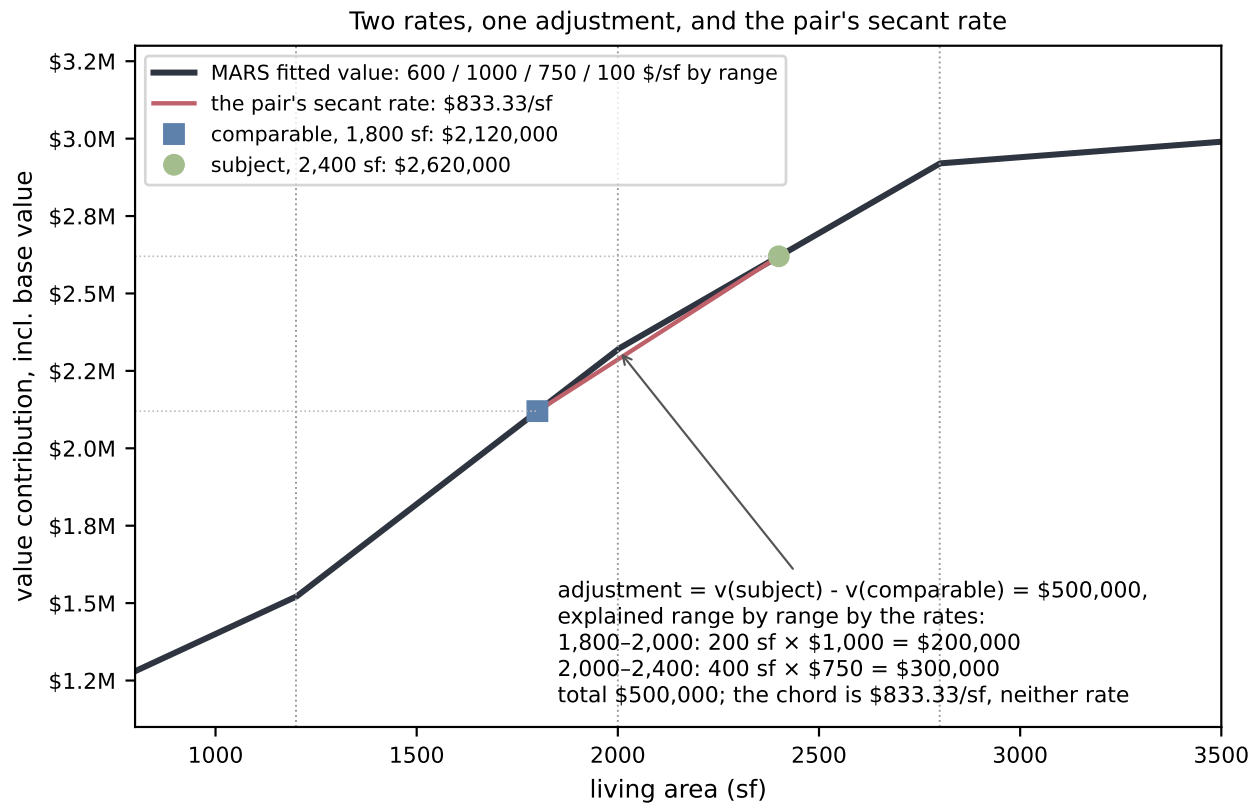


```

Model (v = value contribution, gla = living area in sf):
v = 1,520,000 - 600·h(1200-gla) + 1000·h(gla-1200) - 250·h(gla-2000) - 650·h(gla-2800)
as earth prints it:
(Intercept) 1520000 h(1200-gla) -600 h(gla-1200) 1000 h(gla-2000) -250 h(gla-2800) -650
Rate on a segment = (coefficients of the active right hinges) - (coefficients of the active reflected hinges):
800-1200 sf: -(-600) = $600/sf only the reflected hinge at 1200 is active
1200-2000 sf: 1000 = $1000/sf
2000-2800 sf: 1000 - 250 = $750/sf
2800-3500 sf: 1000 - 250 - 650 = $100/sf all three right hinges active

```

Figure 2: Os quatro valores-chave do exemplo, sua soma e a taxa em cada intervalo. O coeficiente -600 na articulação refletida $h(1200 - gla)$ está destacado, pois o leitor poderia confundir-lo com a taxa; a taxa abaixo de 1.200 pés quadrados é $+600$.



```

Model (v = value contribution, gla = living area in sf):
v = 1,520,000 - 600·h(1200-gla) + 1000·h(gla-1200) - 250·h(gla-2000) - 650·h(gla-2800)
as earth prints it:
(Intercept) 1520000 h(1200-gla) -600 h(gla-1200) 1000 h(gla-2000) -250 h(gla-2800) -650
Adjustment from the comparable (1,800 sf) to the subject (2,400 sf) =  $v(2,400) - v(1,800) = \$500,000$ ;
explained range by range by the rates:
1800-2000 sf: 200 sf  $\times$  $1000/sf = $200,000
2000-2400 sf: 400 sf  $\times$  $750/sf = $300,000
total = $500,000 secant rate for the pair:  $500,000 / 600 = \$833.33/\text{sf}$ 
  
```

Figure 3: O valor ajustado com o imóvel comparável de 1.800 pés quadrados e o imóvel objeto da avaliação de 2.400. O ajuste, ou seja, a diferença entre as duas contribuições, é \$500,000, e as taxas em vigor explicam isso faixa por faixa; a corda que une os dois pontos, cerca de \$833 por pé quadrado, é a taxa secante do par, a taxa única que uma linha reta precisaria para esse par e para nenhum outro; uma regressão comum deve usar uma taxa para cada par.

soma dos coeficientes das dobradiças ativas refletidas, mais o coeficiente de um termo linear (uma característica inserida como uma linha reta sem nó), se o modelo tiver um. Há uma convenção associada a isso: exatamente em um nó, a taxa é considerada a partir da direita, de modo que uma articulação direita conta a partir de seu nó e uma articulação refletida conta apenas estritamente abaixo de seu nó; a taxa em 1.200 pés quadrados é, portanto, \$1,000, a taxa do intervalo que começa ali, e o programa a interpreta da mesma forma.

A verificação de que uma tabela foi elaborada corretamente é o valor de ajuste nos nós. Aos 1.200 pés quadrados, todas as articulações são zero e o valor corresponde à interceptação, \$1,520,000; aos 2.000, é \$1,520,000 + 1,000 × 800 = \$2,320,000; aos 2.800, \$2,320,000 + 750 × 800 = \$2,920,000; e aos 800 pés quadrados, a menor casa nos dados, é \$1,520,000 − 600 × 400 = \$1,280,000. De 800 a 1.200, o valor sobe de \$240,000, a uma taxa de \$600, que corresponde à primeira linha; uma tabela que interpretasse os coeficientes como a taxa teria o valor diminuindo da esquerda para a direita até o nó em 1.200, e os valores mostram que isso não ocorre. A Figura 2 representa os quatro nós, sua soma e a taxa em cada intervalo, com o coeficiente −600 destacado nos locais em que o leitor poderia confundi-lo com a taxa.

Mais duas complicações que o programa lida e que uma tabela manual deve:

- **Interações.** O earth, em sua passagem inicial (a etapa que adiciona termos um por vez; Friedman 1991, §3), gera um resultado do tipo $h(\text{gla} - 1500) \times \text{lot}$ quando a taxa de uma característica depende de outra: uma *interação*. A taxa para “lot” difere, então, acima e abaixo de 1.500 pés quadrados de área habitável, e a tabela de taxas de uma característica é sempre a tabela *determinada* pelas demais, mantidas nos valores do imóvel objeto da avaliação. O programa considera um ponto, um valor para todas as outras características, e calcula todas as taxas nesse ponto.
- **Nível versus ajustes.** A interceptação e os termos em outras características definem o nível a partir do qual a contribuição é medida; eles se cancelam em cada ajuste. O programa apresenta as contribuições apenas como os termos da característica, de modo que duas contribuições diferem exatamente pelo valor dos ajustes.

Dois casos: modelos sem e com interações

A regra da seção anterior pode ser formulada como dois teoremas, demonstrados a seguir, e eles fornecem uma resposta clara a uma pergunta que todo leitor de um modelo MARS acaba fazendo, mais cedo ou mais tarde: de quantos dos termos impressos uma taxa realmente depende? A resposta divide-se em dois casos.

Caso 1: sem interações

Contexto. Seja $h(u) = \max(0, u)$ para u reais. Um modelo MARS sem interações nas características $x, z_1, \dots, z_q$ apresenta o ajuste

$$f(x, z_1, \dots, z_q) = \beta_0 + g(x) + \sum_{k=1}^q g_k(z_k),$$

onde β_0 é a interceptação, cada g_k é uma função apenas de z_k , e g reúne todos os termos em x :

$$g(x) = c \cdot x + \sum_{j=1}^K a_j h(x - t_j) + \sum_{j=1}^K b_j h(t_j - x).$$

Aqui, $t_1 < t_2 < \dots < t_K$ são os nós distintos das dobradiças em x ; a_j é o coeficiente da dobradiça direita em t_j e b_j é o da dobradiça refletida em t_j , sendo ambos 0 quando o modelo não possui tal termo; e c é o coeficiente de um termo linear simples $c \cdot x$, uma característica inserida como uma reta sem nó, que o earth produz apenas para características nomeadas em `linpreds` ou, para qualquer característica, quando `Auto.linpreds` está ativado (veja a observação após o Teorema 1); $c = 0$ quando não há tal termo, como em todos os modelos deste suplemento. Seja $t_0 = -\infty$ e $t_{K+1} = +\infty$ e denomine-se $S_i = (t_i, t_{i+1})$, para $i = 0, 1, \dots, K$, os *segmentos* de x ; t_i é o nó esquerdo de S_i e t_{i+1} seu nó direito. Em cada S_i , cada somando de g é identicamente zero ou linear, de modo que g é linear em S_i ; sua inclinação nesse ponto, que também é $\partial f / \partial x$ em S_i , pois nenhum outro somando de f depende de x , é a *taxa* em S_i e é denotada por r_i . A tabela de taxas de x é a lista $r_0, r_1, \dots, r_K$. (Se $K = 0$ houver um único segmento, $(-\infty, +\infty)$, e a tabela for a taxa única $r_0 = c$.) No próprio nó, g não possui derivada: suas derivadas à esquerda e à direita são r_{i-1} e r_i , que diferem em $a_i + b_i$ (Teorema 2 abaixo); portanto, o valor que uma tabela de taxas apresenta em t_i é uma convenção, adotada aqui a partir da direita, e não um valor de g' .

Teorema 1 (a taxa em um segmento). Utilizando a notação do contexto, para todo $i \in \{0, 1, \dots, K\}$,

$$r_i = c + \sum_{j=1}^i a_j - \sum_{j=i+1}^K b_j,$$

sendo que uma soma vazia é definida como 0. Em particular, r_i depende de, no máximo, K dos coeficientes de articulação $2K$, um por nó, juntamente com c .

Demonstração do Teorema 1. Seja i e um ponto $x \in S_i$, de modo que $t_i < x < t_{i+1}$. Considere cada somando de g em um bairro de x suficientemente pequeno para estar dentro de S_i . O termo simples $c \cdot x$ tem derivada c . Para a articulação direita em t_j : se $j \leq i$, então $t_j \leq t_i < x$, portanto $h(x - t_j) = x - t_j$ na vizinhança e sua derivada é 1; se $j \geq i + 1$, então $x < t_{i+1} \leq t_j$, portanto $h(x - t_j) = 0$ nesse ponto e sua derivada é 0. Para a articulação refletida em t_j : se $j \geq i + 1$, então $x < t_j$, portanto $h(t_j - x) = t_j - x$ e sua derivada é -1 ; se $j \leq i$, então $t_j < x$, portanto $h(t_j - x) = 0$ e sua derivada é 0. Uma soma finita de funções diferenciáveis em x é diferenciável nesse ponto pela soma das derivadas, o que resulta em

$$g'(x) = c + \sum_{j \leq i} a_j \cdot 1 + \sum_{j \geq i+1} a_j \cdot 0 + \sum_{j \leq i} b_j \cdot 0 + \sum_{j \geq i+1} b_j \cdot (-1),$$

a fórmula indicada. Quanto à contagem: os conjuntos de índices $\{j : j \leq i\}$ e $\{j : j \geq i + 1\}$ são disjuntos e, juntos, esgotam $\{1, \dots, K\}$; portanto, cada nó t_j contribui exatamente com um dos elementos a_j e b_j , e nunca com ambos; consequentemente, entram, no máximo, K coeficientes de articulação, e r_i é o mesmo em todos os pontos de S_i . ■

O limite é atingido: se $b_j = 0$ para todo j , o segmento mais à direita S_K utiliza todo o K do a_j .

Observação (quando ‘ c ’ não é zero). O earth pode representar uma característica como uma única linha reta sem nós — o termo “ $c \cdot x$ ” da configuração — de duas maneiras diferentes, e a diferença é importante. “`linpreds`”, uma lista de características nomeadas, como “`linpreds = c("GLA")`”, *força* cada característica da lista a ser representada linearmente, mesmo quando um ajuste com nós seria melhor; essa é uma decisão do analista e pode prejudicar o ajuste. “`Auto.linpreds`”, uma única opção ativada por padrão, não força nada: ela apenas altera a forma como o earth representa uma característica cujo ajuste se revelou verdadeiramente linear — uma única articulação com seu nó no menor valor observado —, exibindo-a como um coeficiente e o nome da variável, em vez de como uma articulação; o ajuste permanece o mesmo. Em ambos os casos, o

earth imprime o termo como o nome da variável sem adereços, acompanhado de seus coeficientes — $221.4 * GLA$ — na forma resumida do earth, conforme o exemplo abaixo. O Theorem 1 lida com isso por meio de c , que soma à taxa em cada segmento. Por exemplo, a chamada ‘

```
mod_linear <- earth(
  SalePrice ~ GLA + LotSize + BathrmCount + BedrmCount,
  data = sales,
  degree = 1,
  linpreds = c("GLA", "LotSize", "BathrmCount", "BedrmCount")
)
```

‘ insere cada característica linearmente (com ‘ `degree = 1`’, de modo que nenhum produto dos termos lineares seja ajustado) e exibe, no formato de resumo do earth (saída ilustrativa, não um modelo ajustado), ‘

```
SalePrice =
  179843
+ 221.4 * GLA
+ 11.8 * LotSize
+ 34872 * BathrmCount
+ 17641 * BedrmCount
```

‘ Para a área habitável, esta é a configuração com ‘ $c = 221.4$ ’ e sem articulações, ‘ $K = 0$ ’: há um único segmento, e o Teorema 1 fornece a taxa única $r_0 = c = \$221.40$ por pé quadrado em todo o intervalo dos dados; tamanho do lote, banheiros e quartos são interpretados da mesma forma, com \$11.80 por pé quadrado de lote, \$34,872 por banheiro e \$17,641 por quarto. Tal modelo é uma regressão comum no sentido deste suplemento, com uma taxa por característica. Nos dados, tal termo corresponde à mesma reta que uma única articulação à direita com seu nó no menor valor observado, e o Journal opera com `Auto.linpreds = FALSE`; assim, em seus modelos, uma característica cujo gráfico da variável é reto ao longo dos dados aparece como essa única articulação, `h(gla-800) 700`, por exemplo, o nó na menor casa dos dados, com $c = 0$, $K = 1$ e $a_1 = 700$: a taxa é 0 abaixo do nó, em um trecho sem vendas, e 700 acima dele, de modo que a tabela de taxas sobre os dados possui uma única linha. Daí decorre um corolário; a variação da taxa em um nó é o Teorema 2 abaixo.

Corolário 1 (o sinal refletido). Uma dobradiça refletida com coeficiente b_j contribui com $-b_j$ para a taxa em cada segmento à esquerda de t_j e com 0 à direita. No exemplo em questão, $b_1 = -600$ em $t_1 = 1,200$ contribui com $+600$ para r_0 , o que constitui a essência da armadilha em torno da qual este suplemento foi construído.

Demonstração. Consulte a segunda soma do Teorema 1. ■

Um exemplo com sete nós, e a suposição que derrota os leitores

A contagem é importante devido a uma suposição que quase todo mundo faz ao analisar um modelo MARS impresso: que o coeficiente impresso ao lado de um nó é a inclinação do segmento cujo nó esquerdo ele representa. Mas não é. **O coeficiente de uma articulação é um ajuste à inclinação proveniente da esquerda, não a inclinação em si**; portanto, a inclinação de um segmento é a inclinação do primeiro segmento somada ao total acumulado de todos esses ajustes em seu nó esquerdo e em todos os nós mais à esquerda. Um leitor que parte dessa suposição errada tenta fazer os cálculos mentalmente, ou em um pequeno programa ou fórmula de planilha, percebe

que os números não reproduzem os valores de ajuste e desiste, concluindo que o MARS é opaco. Ele não é opaco; é cumulativo.

Teorema 2 (o total acumulado). Utilizando a notação do Cenário 1, para todo $i \in \{1, \dots, K\}$,

$$r_i = r_{i-1} + a_i + b_i.$$

Consequentemente, $r_i = r_0 + \sum_{j=1}^i (a_j + b_j)$ para todo i , onde $r_0 = c - \sum_{j=1}^K b_j$ é a taxa no segmento mais à esquerda e $r_K = c + \sum_{j=1}^K a_j$ é a taxa no segmento mais à direita.

Demonstração do Teorema 2. Seja $i \in \{1, \dots, K\}$. Pelo Teorema 1,

$$r_i = c + \sum_{j=1}^i a_j - \sum_{j=i+1}^K b_j \quad \text{e} \quad r_{i-1} = c + \sum_{j=1}^{i-1} a_j - \sum_{j=i}^K b_j.$$

Subtraindo, o c se cancela; as duas somas de a diferem em um único termo, a_i ; e, como $\sum_{j=i}^K b_j = b_i + \sum_{j=i+1}^K b_j$, as duas somas de b diferem em um único termo, b_i , que é subtraído em r_{i-1} e não em r_i . Portanto, $r_i - r_{i-1} = a_i + b_i$. Adicionando essa identidade para $j = 1, \dots, i$ no lugar de i , os lados esquerdos se reduzem: $(r_1 - r_0) + (r_2 - r_1) + \dots + (r_i - r_{i-1}) = r_i - r_0$, o que fornece a fórmula da soma. Os valores de r_0 e r_K são o Teorema 1 em $i = 0$, onde a soma de a é nula, e em $i = K$, onde a soma de b é nula. ■

Corolário 2 (a regra de leitura). No contexto do Caso 1, para todo $i \in \{1, \dots, K\}$, a taxa no segmento cujo nó esquerdo é t_i é $r_i = r_{i-1} + a_i + b_i$: os coeficientes indicados em um nó são somados à taxa proveniente da esquerda e não constituem, por si só, a taxa do segmento que começa nesse ponto. Os dois coincidem, $r_i = a_i + b_i$, exatamente quando $r_{i-1} = 0$; em particular, para um modelo cujas únicas dobradiças são dobradiças à direita e que não possui termo linear, isso ocorre em $i = 1$ e, pelo Teorema 2, em nenhum nó posterior, a menos que a soma dos coeficientes nos nós anteriores seja igual a zero.

Demonstração. A primeira igualdade é o Teorema 2. $r_i = a_i + b_i$ se e somente se $r_{i-1} = 0$ decorre dela. Se $b_j = 0$ para todo j e $c = 0$, o Teorema 2 indica que $r_0 = 0$, portanto $r_1 = a_1$ e $r_{i-1} = \sum_{j < i} a_j$, o que é 0 apenas quando a soma desses coeficientes for zero. ■

Corolário 3 (os ajustes como integrais). No contexto do Caso 1, g é contínua em todos os nós, pois cada articulação o é; o mesmo se aplica a $f(\cdot, z)$ para todo z ; é isso que faz com que o valor em um nó seja o mesmo, seja ele alcançado pela esquerda ou pela direita, e o que permite que as taxas sejam percorridas de uma quantidade para outra. Sejam x_c e x_s as quantidades de x para um comparável e um sujeito, com as demais características mantidas nos mesmos valores para ambos, de modo que $g(x)$; os termos de f que envolvem x , representam a contribuição de x na quantidade x . Escrevamos $u_1 = \min(x_c, x_s)$ e $u_2 = \max(x_c, x_s)$, e $|I|$ para o comprimento de um intervalo I . Então, o ajuste $g(x_s) - g(x_c)$, o valor adicionado à contribuição do comparável para torná-la igual à do sujeito, é

$$g(x_s) - g(x_c) = \int_{x_c}^{x_s} g'(u) du = \text{sign}(x_s - x_c) \sum_{i=0}^K r_i \cdot |S_i \cap [u_1, u_2]|.$$

Em outras palavras: o ajuste é a integral da taxa entre as duas quantidades e, como a taxa é constante em cada segmento, a integral é a soma, ao longo dos segmentos encontrados ao longo do caminho, da taxa multiplicada pela largura.

Demonstração. A função g é contínua e linear por trechos, com um número finito de trechos; portanto, é absolutamente contínua. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $g(x_s) - g(x_c) = \int_{x_c}^{x_s} g'(u) du$, sendo que a derivada existe em todos os pontos, exceto nos nós, que formam um conjunto finito. Em cada S_i , o integrando é igual a r_i pelo Teorema 1; portanto, $\int_{u_1}^{u_2} g'(u) du$ é a soma, sobre i , de r_i vezes o comprimento de $S_i \cap [u_1, u_2]$, sendo que os segmentos não se encontram contribuindo com o comprimento 0; e $\int_{x_c}^{x_s} = \text{sign}(x_s - x_c) \int_{u_1}^{u_2}$ pela orientação da integral. ■

A tabela de taxas é g' ; os ajustes, calculados diretamente como $g(x_s) - g(x_c)$, são iguais à sua integral entre as duas grandezas; e os Teoremas 1 e 2 explicam de que consiste g' . Na prática, os ajustes são sempre calculados como essa diferença entre as contribuições, o que não requer taxas alguma; o corolário explica por que as taxas, lidas intervalo por intervalo, os reproduzem, o que as torna uma explicação dos ajustes e uma verificação dos mesmos, e não uma forma de calculá-los.

Considere a área habitável em um conjunto de dados cuja menor casa tenha 800 pés quadrados, com sete nós, em 1.200, 1.600, 2.000, 2.400, 2.800, 3.200 e 3.600 pés quadrados, e nove termos no modelo, dois deles refletindo dobradiças, cada um emparelhado com uma dobradiça direita no mesmo nó: em 1.200 e em 2.400:

h(1200-gla)	-500
h(gla-1200)	700
h(gla-1600)	-100
h(gla-2000)	150
h(2400-gla)	-200
h(gla-2400)	-250
h(gla-2800)	-300
h(gla-3200)	-150
h(gla-3600)	50

Sete nós formam oito segmentos. A taxa em cada um deles é a soma dos coeficientes das articulações ativas à direita menos a soma dos coeficientes das articulações ativas refletidas:

segmento (sf)	termos ativos	taxa (\$/sf)
800 a 1.200	$h(1200 - \text{gla}), h(2400 - \text{gla})$	$500 + 200 = 700$
1.200 a 1.600	$h(\text{gla} - 1200), h(2400 - \text{gla})$	$700 + 200 = 900$
1.600 a 2.000	dobras à direita em 1.200, 1.600; $h(2400 - \text{gla})$	$700 - 100 + 200 = 800$
2.000 a 2.400	oscila entre 1.200 e 2.000; $h(2400 - \text{gla})$	$700 - 100 + 150 + 200 = 950$
2.400 a 2.800	oscila entre 1.200 e 2.400	$700 - 100 + 150 - 250 = 500$
2.800 a 3.200	oscila entre 1.200 e 2.800	$500 - 300 = 200$
3.200 a 3.600	oscila entre 1.200 e 3.200	$200 - 150 = 50$
acima de 3.600	todas as sete dobradiças do lado direito	$50 + 50 = 100$

Três valores a serem lidos na tabela. A taxa do segmento mais à direita, $700 - 100 + 150 - 250 - 300 - 150 + 50 = 100$, combina os coeficientes de todas as sete dobradiças à direita, uma por nó, o que corresponde ao limite do Teorema 1 com $K = 7$; as duas dobradiças refletidas não têm influência nesse caso, pois uma dobradiça refletida é plana à direita de seu próprio nó e o segmento mais à direita fica à direita de todos os nós. O segmento mais à esquerda, de 800 até seu nó direito em 1.200, é a imagem espelhada: apenas as dobradiças refletidas contam, com seus sinais invertidos, pois cada nó está no próprio nó direito ou à direita dele. E em cada nó que contém um par, o passo

é a soma dos dois coeficientes: em 1.200, $-500 + 700 = +200$, de 700 a 900; em 2.400, a taxa cai de 950 para 500, uma variação de -450 , que é exatamente a soma dos dois coeficientes nesse nó, -250 e -200 : cruzar o nó ativa a dobradiça direita e desativa a dobradiça refletida, e ambas as mudanças atuam na mesma direção.

É possível chegar ao mesmo valor no segmento mais à direita caminhando: comece em 700 no primeiro segmento, passe por 800 até 1.200 e, a cada nó atravessado, some os coeficientes presentes nesse ponto: $+200, -100, +150, -450, -300, -150, +50$. Essa rota passa por todos os oito segmentos e todos os nove termos e chega ao mesmo 100. A soma direta é mais curta e é o que o programa faz; o percurso é o que um leitor deve fazer uma vez, manualmente, para ver que o coeficiente ao lado de um nó é um passo e não um nível. O “ -450 ” em 2.400 consiste em dois meios-passos: ao cruzar o nó, deixa-se para trás a dobradiça refletida $h(2400 - gla)$ e, com ela, o “ $+\$200$ ” que foi adicionado abaixo do nó; e traz a dobradiça direita $h(gla - 2400)$, cujo “ -250 ” começa ali. $-200 - 250 = -450$, e a taxa cai de \$950 para \$500.

A Figura 4 ilustra a mesma lição para um modelo de cinco nós, pequeno o suficiente para ser verificado a olho nu. As barras representam os coeficientes impressos nos nós; a escada representa a taxa em cada segmento; e a escada começa com a taxa do primeiro segmento, \$900, definida pela articulação refletida, sendo que cada degrau é a soma das barras naquele nó. A taxa no segmento mais à direita, $650 - 250 + 150 - 200 - 150 = 200$, utiliza todas as cinco dobradiças direitas; a dobradiça refletida em 1.200, impressa como -900 , define o primeiro segmento como $+900$ e não afeta nada mais.

Há duas observações a serem feitas sobre o formato desse gráfico, pois dizem respeito às casas e não ao MARS. Primeiro, o eixo começa em 800 pés quadrados e não em zero, e o gráfico começa no eixo: todos os gráficos de um modelo de ajuste neste suplemento, assim como os gráficos que o software de modelagem traça, vão da menor casa nos dados até a maior e não mostram nada fora desse intervalo. Cada mercado tem uma casa menor, abaixo da qual não há vendas, e o gráfico variável não mostra nada abaixo dela: não é zero, mas nenhum valor comprovado pelas vendas; a fórmula ainda retornaria um número nesse ponto, e esse número é uma extrapolação. Os gráficos utilizam um limite mínimo de 800 pés quadrados, mas esse limite é uma característica do mercado, não uma constante: diferentes mercados têm diferentes tamanhos mínimos de imóveis que aparecem no MLS, e é o conjunto de dados, e não o avaliador, que determina onde ele se situa. Em segundo lugar, a forma varia de mercado para mercado: no exemplo costeiro, a faixa mais íngreme é de 1.200 a 2.000 pés quadrados, e na Figura 4 esse é o primeiro segmento. Em uma área de alto custo, como Atherton ou Hillsborough, o segmento mais acentuado da curva da área habitável (GLA) pode estar além de 4.000 ou 5.000 pés quadrados, onde se encontram os compradores. E um bairro no qual uma construtora ergueu casas de um único tamanho com problemas em um determinado período pode apresentar uma queda acentuada na taxa em uma faixa intermediária, como mostra o gráfico elaborado entre 1.600 e 2.000. Em um mercado mais amplo, os gráficos variáveis são diversos, e a tabela de taxas é a forma como o avaliador interpreta o que um gráfico específico indica. As figuras 5 e 6 ilustram duas dessas formas tal como seriam impressas, para que o leitor possa construir cada tabela de taxas de acordo com a regra e verificá-la em relação à escala.

Caso 2: interações

Um termo de interação é um coeficiente multiplicado pelo produto de fatores em diferentes variáveis, sendo cada fator uma variável de referência ou a própria variável; por exemplo, $\gamma \cdot h(gla - 1500) \cdot lot$. Tudo no Caso 1 permanece, exceto uma palavra: a taxa em um segmento agora é uma função das outras variáveis, e não uma constante. Seguem-se a afirmação e sua demonstração, e, em seguida, o que isso implica para os cálculos de um avaliador.

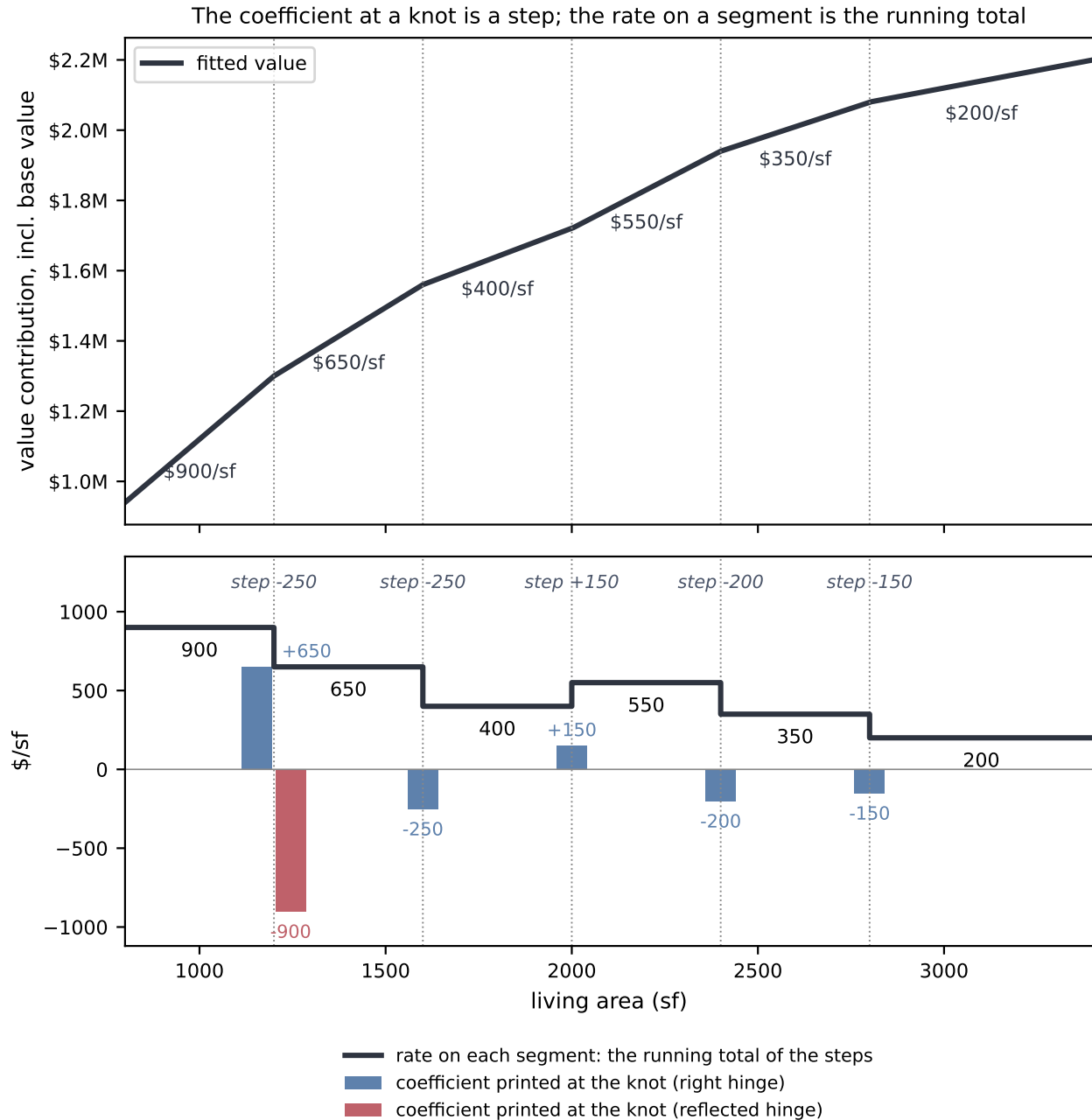


Figure 4: Um modelo de cinco nós com base em dados que começam em 800 pés quadrados: $-900 h(1200 - \text{gla}) + 650 h(\text{gla} - 1200) - 250 h(\text{gla} - 1600) + 150 h(\text{gla} - 2000) - 200 h(\text{gla} - 2400) - 150 h(\text{gla} - 2800)$. Acima, o valor ajustado com a taxa indicada em cada segmento; não há valores abaixo de 800 pés quadrados, pois não existem casas com essa metragem. Abaixo, o coeficiente exibido em cada nó como uma barra e a taxa em cada segmento como uma escada: cada degrau da escada é a soma das barras naquele nó (uma barra aqui, duas onde um nó contém um par, Teorema 2), de modo que a taxa em um segmento é a taxa do primeiro segmento mais o total acumulado dos degraus à sua esquerda, e não o coeficiente ao lado dele: cada coeficiente ajusta a taxa que vem da esquerda.

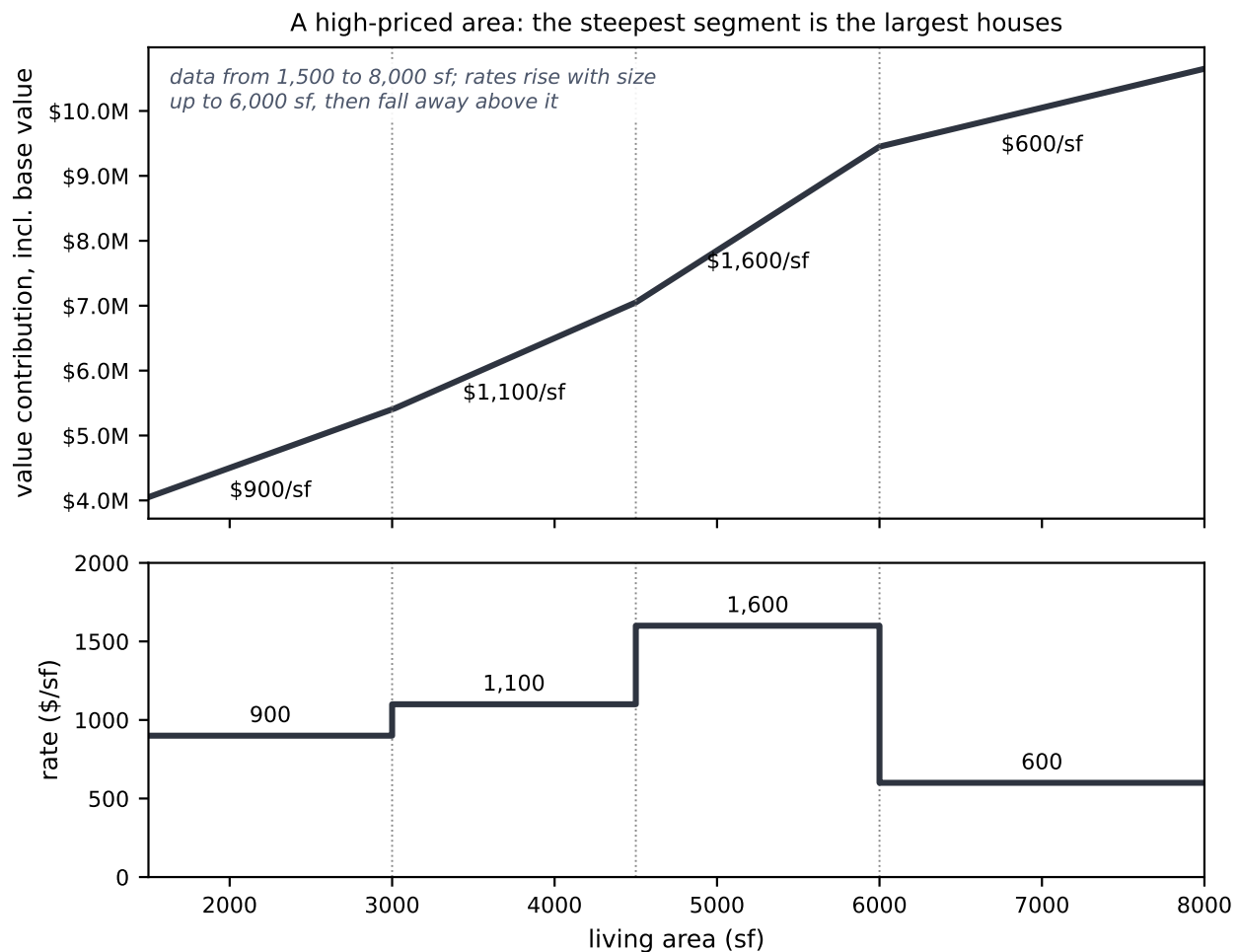


Figure 5: Uma região com imóveis de alto valor, com áreas que variam de 1.500 a 8.000 pés quadrados: $-900 h(3000 - gla) + 1100 h(gla - 3000) + 500 h(gla - 4500) - 1000 h(gla - 6000)$, cruze com \$5,400,000 no primeiro nó. Preços \$900 , \$1,100 , \$1,600 e \$600 por pé quadrado: o segmento de maior aumento está entre 4.500 e 6.000 pés quadrados, onde estão os compradores; o primeiro segmento apresenta um aumento mais moderado e, acima de 6.000, o preço cai. A regra permanece a mesma; apenas o mercado mudou.

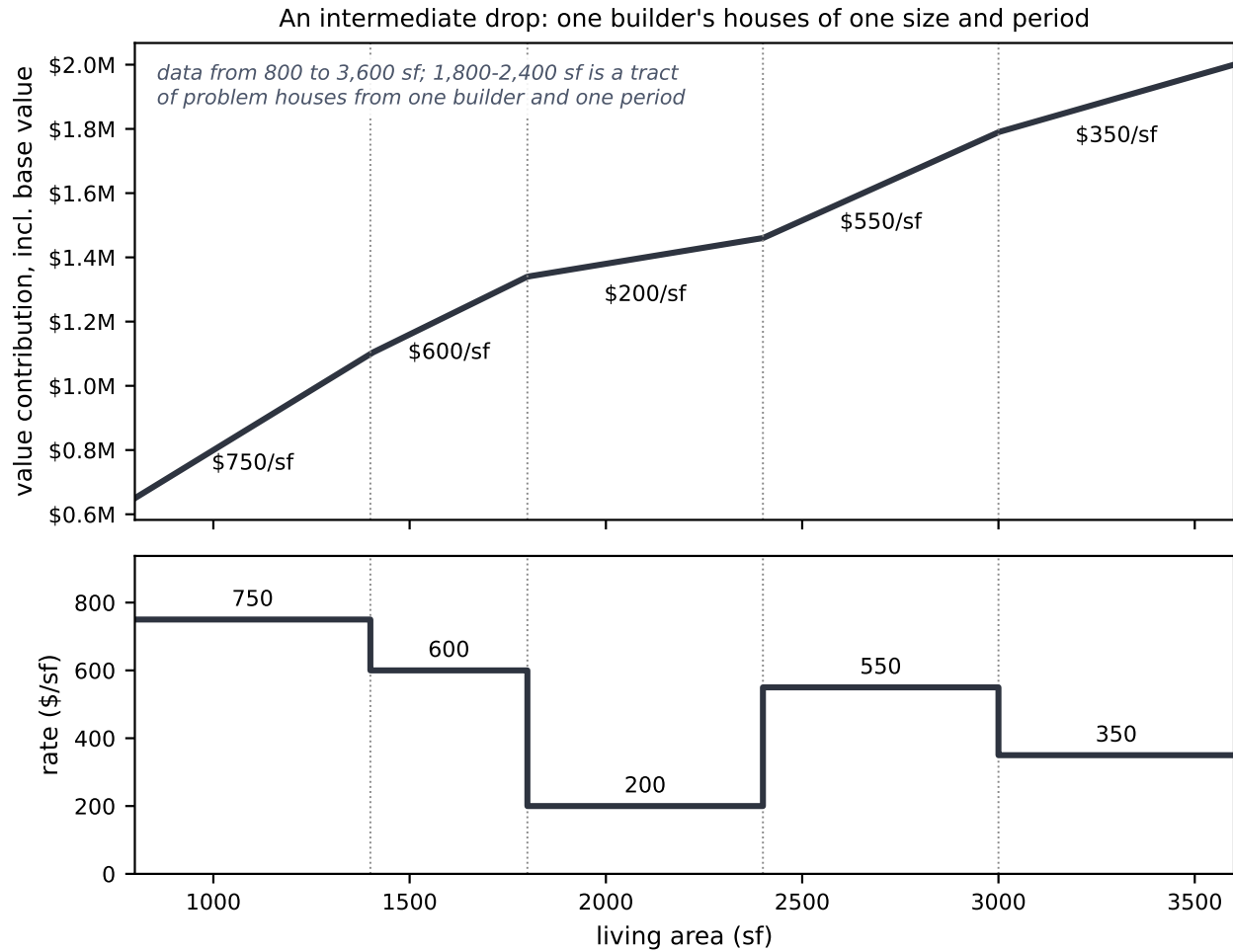


Figure 6: Uma queda intermediária, com dados de 800 a 3.600 pés quadrados: $-750h(1400 - gla) + 600h(gla - 1400) - 400h(gla - 1800) + 350h(gla - 2400) - 200h(gla - 3000)$, intersecte \$1,100,000 no primeiro nó. Taxas de \$750, \$600, \$200, \$550 e \$350 por pé quadrado. Suponha que o segmento de 1.800 a 2.400 seja um conjunto de casas desse tamanho, construídas por uma única construtora em um único período, com problemas de preços de mercado (uma ilustração hipotética); a taxa cai para \$200 nesse ponto e se recupera acima dele. Um leitor que considere o coeficiente -400 em 1.800 como a taxa desse segmento, ou que presuma que as taxas caem apenas com o tamanho, interpretará erroneamente o conjunto de casas.

Configuração. Um modelo MARS com interações entre as características $x, z_1, \dots, z_q$ apresentou o valor de ajuste

$$f(x, z) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \gamma_m \prod_{k \in F_m} B_{m,k}(z_k),$$

onde M é o número de termos, excluindo a interceptação, β_0 é a interceptação, e o modelo é a interceptação mais a soma de seus termos; o termo m é $\gamma_m \prod_{k \in F_m} B_{m,k}(z_k)$: seu coeficiente γ_m multiplicado por um fator para cada característica no termo. Aqui, $z = (z_1, \dots, z_q)$ e, para que um índice percorra todas as características, z_0 representa x . As características que aparecem no termo m formam o conjunto $F_m \subseteq \{0, 1, \dots, q\}$; nenhuma característica aparece duas vezes em um termo; e cada fator $B_{m,k}$ é uma função de uma característica z_k , de um dos três tipos: a própria característica, z_k ; uma articulação direita $h(z_k - t)$; ou uma articulação refletida $h(t - z_k)$. Seja $M_x = \{m : 0 \in F_m\}$ os termos que contêm x . Para $m \in M_x$, $B_{m,0}(x)$ é o fator do termo em x , e as outras características do termo, aquelas z_k com $k \in F_m$, $k \neq 0$, são os *parceiros* de x nesse termo. Escreva

$$P_m(z) = \prod_{k \in F_m, k \neq 0} B_{m,k}(z_k)$$

para o produto dos fatores parceiros, sendo que um produto vazio é 1. Em outras palavras: uma vez preenchidas as outras características do sujeito, os parceiros de um termo resultam, após a multiplicação, em um número comum; esse número multiplicado pelo coeficiente impresso é o coeficiente de um termo simples de área habitável, e o termo é lido como no Caso 1. O produto dos parceiros $P_m(z)$ é o que resta do termo m quando seu fator em x é retirado: o termo m é $\gamma_m B_{m,0}(x) P_m(z)$. Em um determinado ponto z , ele é um número; assim, em um segmento, o termo atua em x como uma única articulação com coeficiente $\gamma_m P_m(z)$, e esse produto é a forma como os parceiros entram na taxa. Um termo sem parceiro tem $P_m(z) = 1$ e é um termo do Caso 1.

Por exemplo, no termo $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$ do exemplo ilustrado abaixo, sendo x a área habitável, o fator em x é $h(\text{gla} - 1200)$, sendo que um dos parceiros é o lote e $P_m(z) = h(\text{lot} - 6000)$. Em um lote de 5.000 pés quadrados $P_m(z) = 0$, o termo não acrescenta nada à taxa; em um lote de 10.000 pés quadrados $P_m(z) = 4,000$, o termo atua como uma articulação no valor de 1.200 com coeficiente $0.03 \times 4,000 = 120$, acrescentando \$120 por pé quadrado à taxa acima de 1.200 pés quadrados. Nada aqui limita quantas características um termo pode conter; o argumento “degree” da Terra define esse máximo, e os teoremas abaixo se aplicam a qualquer grau. Um termo com d características possui um gráfico em $d + 1$ dimensões, que ninguém consegue desenhar quando d excede dois; o software mostra apenas fatias, uma ou duas características por vez, com as demais mantidas fixas, e o Teorema 3 corresponde a esse mesmo corte realizado no próprio ponto do imóvel objeto da avaliação. $P_m(z)$ é onde esse corte ocorre: por mais parceiros que um termo tenha, em um determinado ponto seu produto é um único número. No termo de quatro características $\gamma h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000) h(\text{age} - 10) \text{baths}$, com $\gamma = 0.001$, cujo gráfico tem cinco dimensões, $P_m(z) = h(\text{lot} - 6000) h(\text{age} - 10) \text{baths}$; em um terreno de 10.000 pés quadrados, com 20 anos de idade e 3 banheiros, é $4,000 \times 10 \times 3 = 120,000$, e ao longo da área habitável todo o termo é uma articulação em 1.200 com coeficientes $\gamma \times 120,000 = 0.001 \times 120,000 = 120$ e \$, somando 120 por pé quadrado: o mesmo que o termo de duas variáveis acima, a partir de um coeficiente trinta vezes menor. É por isso que o coeficiente de um termo de grau elevado costuma aparecer como um número muito pequeno quando seus parceiros são medidos em unidades grandes: ele multiplica o produto de vários valores dos parceiros. E se qualquer componente estiver no lado zero de seu nó — uma área muito inferior a 6.000 pés quadrados ou uma idade inferior a 10 anos —, então $P_m(z) = 0$ e o termo não contribui com nada, independentemente dos outros componentes; quanto maior o

grau, mais maneiras um termo pode ser desativado em um determinado imóvel. Os exemplos neste suplemento utilizam interações bidirecionais (`degree = 2`).

Seja $t_1 < \dots < t_K$ os nós distintos daqueles $B_{m,0}$ que são dobradiças, com $t_0 = -\infty$, $t_{K+1} = +\infty$ e segmentos $S_i = (t_i, t_{i+1})$, como no Caso 1. Para $m \in M_x$ e $i \in \{0, \dots, K\}$, defina

$$s_{m,i} = \begin{cases} +1 & \text{se } B_{m,0} \text{ é a própria variável } x, \text{ ou uma dobradiça direita } h(x - t_j) \text{ com } t_j \leq t_i, \\ -1 & \text{se } B_{m,0} \text{ é uma dobradiça refletida } h(t_j - x) \text{ com } t_j \geq t_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um *ponto* é um valor z das demais características. Como cada $B_{m,0}$ é linear ou identicamente zero em S_i , f é linear em x em S_i para um z fixo; sua inclinação nesse ponto é a *taxa* em S_i no ponto z , denotada por $r_i(z) = \partial f / \partial x$ para $x \in S_i$.

Todas as imagens são exibidas de uma só vez no modelo do exemplo resolvido abaixo, conforme exibido pelo Earth: intercept 900.000, $600 h(\text{gla} - 1200)$, $-350 h(\text{gla} - 2400)$, $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$ e 15 lot. Suas características são a área habitável, $x = z_0 = \text{gla}$, e o tamanho do lote, $z_1 = \text{lot}$, portanto $q = 1$; a interceptação é $\beta_0 = 900,000$ e há $M = 4$ termos. Em um imóvel com 2.000 pés quadrados de área habitável em um lote de 10.000 pés quadrados:

m	γ_m	F_m	$B_{m,0}(x)$	$B_{m,1}(z_1)$	$P_m(z)$	termo no imóvel
1	600	{0}	$h(\text{gla} - 1200)$	nenhum	1	$600 \times 800 = 480,000$
2	-350	{0}	$h(\text{gla} - 2400)$	nenhum	1	$-350 \times 0 = 0$
3	0.03	{0, 1}	$h(\text{gla} - 1200)$	$h(\text{lot} - 6000)$	$h(\text{lot} - 6000)$	$0.03 \times 800 \times 4,000 = 96,000$
4	15	{1}	nenhum	lot	(não está em M_x)	$15 \times 10,000 = 150,000$

Portanto, $M_x = \{1, 2, 3\}$: o termo 4 não tem fator em x , soma o mesmo valor independentemente da área habitável e não entra na taxa de x . O valor ajustado é $f = 900,000 + 480,000 + 0 + 96,000 + 150,000 = \$1,626,000$. Os termos 1 e 2 não têm parceiro, portanto $P_1(z) = P_2(z) = 1$; o termo 3 tem um, e $P_3(z) = h(10,000 - 6,000) = 4,000$, o multiplicador do exemplo acima. O Teorema 3, que se segue, transforma esses valores na taxa. A área habitável possui nós $t_1 = 1,200$ e $t_2 = 2,400$, e o imóvel está no segmento S_1 entre eles, onde os termos 1 e 3 estão ativos e o termo 2 não está ($s_{1,1} = s_{3,1} = 1$, $s_{2,1} = 0$); portanto, $r_1(z) = 600 \times 1 + 0.03 \times 4,000 = 720$, a taxa para um lote de 10.000 pés quadrados na tabela do exemplo trabalhado.

Teorema 3 (a taxa em um segmento, com interações). Com essa notação, para todo i e todo ponto z ,

$$r_i(z) = \sum_{m \in M_x} \gamma_m s_{m,i} P_m(z).$$

Demonstração do Teorema 3. Seja i , um ponto z e $x \in S_i$. Um termo com $m \notin M_x$ não contém nenhum fator em x e é constante em x ; sua derivada em x é 0. Um termo com $m \in M_x$ é igual a $\gamma_m B_{m,0}(x) P_m(z)$, em que $P_m(z)$ não depende de x . Pela análise de casos na demonstração do Teorema 1, aplicada ao fator único $B_{m,0}$, a derivada de $B_{m,0}$ em x é 1 para a própria característica, 1 ou 0 para uma articulação direita, dependendo se seu nó está em t_i ou à esquerda dele, ou em t_{i+1} ou à direita dele, e -1 ou 0 para uma articulação refletida, dependendo se seu nó está em t_{i+1} ou à direita dele, ou em t_i ou à esquerda dele; ou seja, é igual a $s_{m,i}$. Portanto, a derivada do termo é $\gamma_m s_{m,i} P_m(z)$, e a derivada de f , uma soma finita, é a soma dessas derivadas. O valor não depende de qual $x \in S_i$ foi escolhido. ■

O Teorema 1 é o caso especial em que nenhum termo de M_x tem um parceiro, de modo que todo $P_m(z) = 1$; agrupar os termos da soma de acordo com seu nó resulta na fórmula lá demonstrada. Três corolários indicam como os parceiros mudam; o último deles é o fracasso do limite de um por nó e o caso em que “o termo pode se anular”, conforme mostra o exemplo resolvido abaixo.

Corolário 4 (a taxa é um número apenas em um ponto). No contexto do Caso 2, para cada i , a taxa r_i é uma função do ponto z . Ela é constante em z sempre que todos os termos $m \in M_x$ com $s_{m,i} \neq 0$ não tiverem nenhum parceiro. Quando algum termo com $s_{m,i} \neq 0$ tem um parceiro, $r_i(z)$ é a função $z \mapsto \sum_m \gamma_m s_{m,i} P_m(z)$, que varia de acordo com os valores dos parceiros, exceto quando os termos se cancelam exatamente; duas propriedades com o mesmo x no mesmo segmento têm, então, taxas diferentes para x sempre que os produtos de seus parceiros diferem e as diferenças não se cancelam. É por isso que o programa recebe um ponto e por que não existe uma tabela de taxas isolada para uma única característica.

Demonstração. Pelo Teorema 3, $r_i(z) = \sum_{m \in M_x} \gamma_m s_{m,i} P_m(z)$. Se cada termo com $s_{m,i} \neq 0$ não tiver nenhum parceiro, cada um desses P_m é o produto vazio 1 e a soma é uma constante. Caso contrário, a soma contém pelo menos um somando $\gamma_m s_{m,i} P_m(z)$ com $\gamma_m s_{m,i} \neq 0$ e P_m , um produto de um ou mais fatores, cada um dos quais é uma função não constante de um parceiro; portanto, a soma é constante em z somente se esses somandos se cancelarem identicamente. ■

Corolário 5 (em um segmento de x , a taxa é um gráfico variável em cada parceiro). No contexto do Caso 2, fixe i , um parceiro z_p ($p \geq 1$) e os valores de todas as outras características. Então, $z_p \mapsto r_i(z)$ é uma função contínua linear por partes de z_p cujas rupturas se situam entre os nós dos fatores $B_{m,p}$ dos termos em M_x . Ao longo de x , com cada parceiro mantido fixo, a taxa varia apenas nos nós $t_1, \dots, t_K$ de x ; é no espaço conjunto de x e de seus parceiros que a superfície da taxa é cortada tanto pelos nós de x quanto pelos nós de cada parceiro.

Demonstração. Mantendo as demais características fixas, cada $P_m(z)$ é igual a uma constante multiplicada por 1 (se $p \notin F_m$) ou pelo fator único $B_{m,p}(z_p)$, que é o próprio z_p , $h(z_p - t)$ ou $h(t - z_p)$: uma função contínua, linear por partes, de z_p com, no máximo, um ponto de ruptura, em seu nó. Uma combinação linear finita dessas funções, que é o que o Teorema 3 fornece para $r_i(z)$, é contínua e linear por partes, com quebras apenas onde algum somando se quebra. A afirmação ao longo de x é o próprio Teorema 3: para z fixo, $r_i(z)$ é um número em cada S_i e os segmentos se encontram apenas nos nós de x . ■

Corolário 6 (o limite do Teorema 1 não se aplica). No contexto do Caso 2, o número de termos com um somando diferente de zero na fórmula do Teorema 3 para $r_i(z)$ é limitado apenas por $|M_x|$, o número de termos que contêm x , e pode exceder K : um nó de x pode aparecer em vários termos de M_x com parceiros diferentes, cada um deles um termo distinto. Por outro lado, um termo com $s_{m,i} \neq 0$ não contribui em nada em um ponto em que o produto de seu parceiro é zero.

Demonstração. Os termos $\gamma_1 h(x - 1500) \text{lot}$ e $\gamma_2 h(x - 1500) h(\text{age} - 10)$ são termos distintos de M_x com o mesmo nó, e no segmento acima de 1,500 ambos têm $s_{m,i} = 1$, portanto ambos contribuem; e $r_i(z) = \gamma_1 \text{lot} + \gamma_2 h(\text{age} - 10)$ tem dois somandos de um mesmo nó; adicionar mais parceiros acrescenta mais termos no mesmo nó sem limite. Para o inverso, considere um termo cujo parceiro seja uma dobradiça $h(\text{lot} - 6000)$ em um ponto com $\text{lot} < 6000$: então $P_m(z) = 0$ e o somando se anula, embora $s_{m,i} \neq 0$; em um ponto com $\text{lot} > 6000$ isso não ocorre. ■

Vale mencionar aqui uma observação prática baseada nas próprias avaliações do editor. Uma vez permitidas as interações, o gráfico da área habitável que o software traça para a variável por si só costuma ficar reto, com uma única taxa, enquanto as curvas que um modelo sem interações

teria introduzido na área habitável aparecem, em vez disso, nos termos de interação, tipicamente área habitável com tempo de venda (o tempo entre a venda e a data efetiva) ou área habitável com banheiros. O Teorema 3 explica por que a linha reta não representa a taxa. O gráfico por variável no earthUI representa os termos sem parceiros; já o gráfico de grau um do plotmo representa uma fatia do modelo completo, com as outras variáveis em suas medianas. Os termos de interação são representados como superfícies em outros lugares (os gráficos de grau um e grau dois do plotmo, Milborrow 2024b, que o earthUI mostra lado a lado). Em qualquer imóvel real, a taxa para a área habitável é a inclinação da reta mais, para cada termo de interação ativo, seu coeficiente multiplicado pelo valor do fator de seu parceiro; ela muda nos nós da área habitável desses termos, e em que medida depende dos parceiros: uma venda há seis anos e uma venda no mês passado, ou uma casa com dois banheiros e uma com quatro, estão em tabelas de taxas diferentes para a área habitável, mesmo que o gráfico da área habitável mostre uma única linha. Um leitor que toma a linha como a taxa se depara novamente com a barreira, um nível acima; a tabela de taxas no imóvel objeto da avaliação é o caminho para superá-la. A Figura 7 representa um desses modelos da mesma forma que o software, como uma superfície sobre a área habitável e a idade da venda, e então interpreta o gráfico da variável área habitável a partir dela em duas idades de venda.

A Figura 8 apresenta a mesma ideia na direção oposta, partindo do mercado da Figura 2. É construído um modelo para esse mercado com uma interação entre a área habitável e a idade de venda, de modo que o efeito principal da área habitável seja uma linha reta, \$500 por pé quadrado, e os quatro termos de interação representem as curvas. O gráfico que o software traça para a área habitável por conta própria é a linha reta. Quando analisadas em uma venda com quatro anos de idade, as taxas de área habitável são as da Figura 2 por dólar, \$600, \$1,000, \$750 e \$100; quando analisadas em uma venda recente, o gráfico é a linha reta; quando analisadas com dois anos de idade, ficam entre os dois valores. O modelo foi construído para ilustrar o conceito, não ajustado às vendas, e um ajuste real não se encaixaria na Figura 2 de forma tão perfeita; mas o mecanismo é o mesmo que um ajuste real utiliza, e é por isso que um avaliador que vê o gráfico da área habitável se endireitar após adicionar interações não perdeu as curvas. As curvas se deslocaram para os termos de interação, onde apenas uma leitura em um ponto as recupera. O gráfico de efeitos principais de um modelo com interações representa apenas os termos da variável, que é a fatia em uma configuração dos parceiros em que todos os termos de interação são zero (aqui, uma nova venda), e não a forma do mercado; interprete o gráfico da variável no imóvel objeto da avaliação.

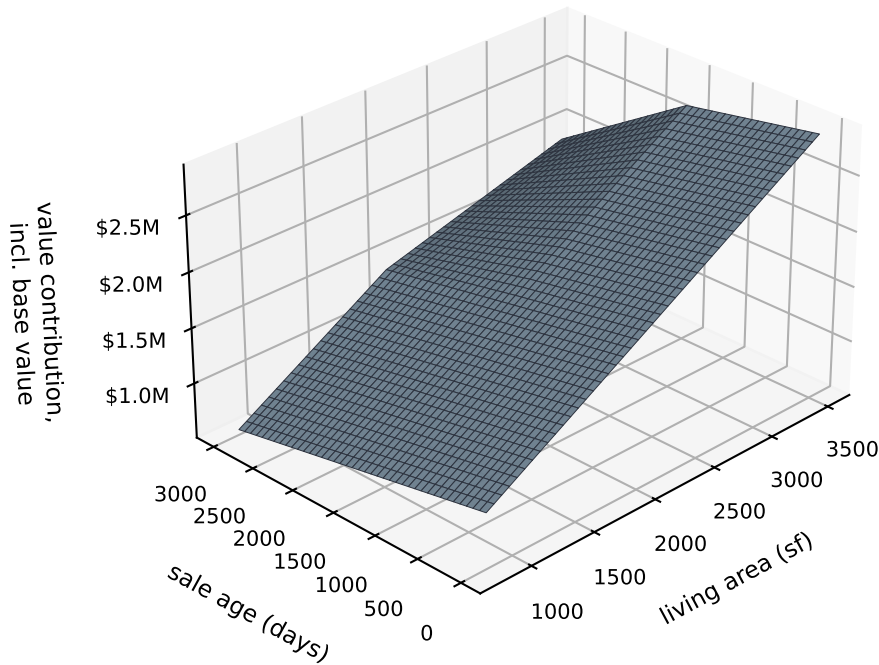
A última consequência diz respeito aos ajustes, e não à taxa, e é ela que chega à tabela de preços.

Teorema 4 (a divisão de um ajuste depende da ordem). No contexto do Caso 2, seja $y = z_p$ ($p \geq 1$) uma das outras características e seja w a representação das restantes, z_k para $k \notin \{0, p\}$; escreva-se $f(x, y, w)$ para f com seus argumentos agrupados dessa forma. Seja um imóvel comparável em (x_c, y_c, w) e um imóvel objeto da avaliação em (x_s, y_s, w) , sendo w o mesmo para ambos. Para um valor y^* de y , defina os *ajustes para x com y mantido em y^** como

$$\Delta_x(y^*) = f(x_s, y^*, w) - f(x_c, y^*, w).$$

Seja $M_{x,y}$ o conjunto dos termos que contêm tanto x quanto y . Cada um desses termos é igual ao seu coeficiente multiplicado por três partes: $\gamma_m A_m(x) C_m(y) Q_m(w)$; $A_m(x) = B_{m,0}(x)$ é seu fator em x , que é o próprio x ou uma articulação em x ; $C_m(y) = B_{m,p}(y)$ é seu fator em y , que é o próprio y ou uma articulação em y ; e $Q_m(w)$ é o produto de seus fatores nas características restantes, sendo cada uma dessas características o próprio termo ou uma articulação nele, e é igual a 1 quando o termo não possui nenhum outro fator. No exemplo resolvido abaixo, um desses termos é $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$, com $A_m(x) = h(\text{gla} - 1200)$, $C_m(y) = h(\text{lot} - 6000)$ e $Q_m(w) = 1$.

Living area by sale age: the surface the software draws



The living-area variable graph, read at two points

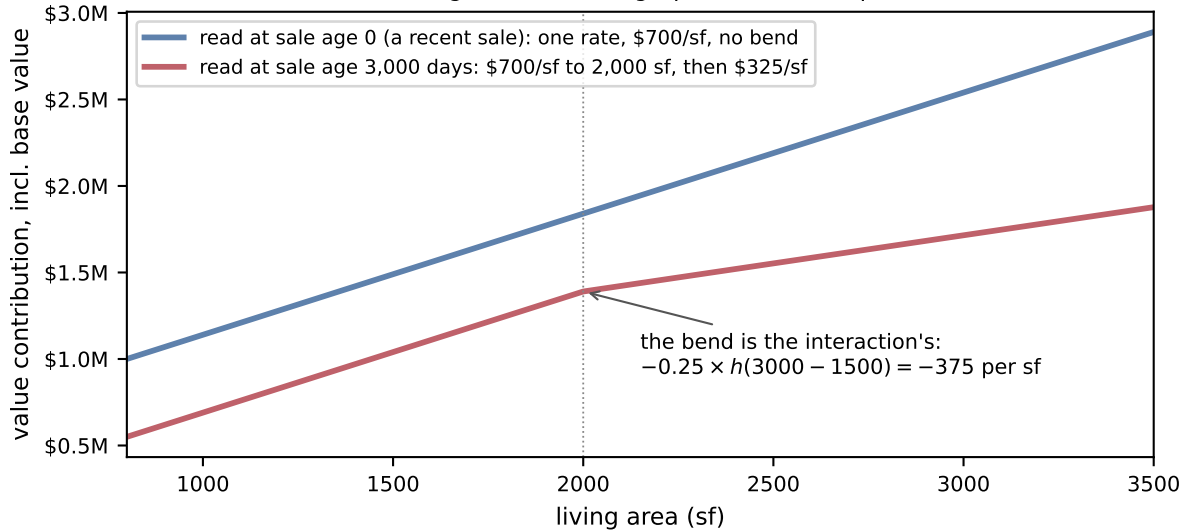


Figure 7: Uma interação entre a área habitável e o tempo de venda: $1,000,000 + 700 h(gla - 800) - 150 \text{ saleage} - 0.25 h(gla - 2000) h(\text{saleage} - 1500)$, com base em dados que variam de 800 a 3.500 pés quadrados e vendas com até 3.000 dias de duração. Acima, a superfície que o software de modelagem traça para esse par. Abaixo, o gráfico da variável área habitável lido em dois pontos, conforme exige o Teorema 3: em qualquer venda com até 1.500 dias, o fator parceiro $h(\text{saleage} - 1500)$ é zero, a interação não contribui em nada e o gráfico é uma linha reta de \$700 por pé quadrado; em uma venda com 3.000 dias, o fator parceiro é 1.500, a interação subtrai $0.25 \times 1,500 = 375$ por pé quadrado acima de 2.000 pés quadrados, e a taxa nesse caso é \$325. O efeito principal da área habitável (os termos apenas na área habitável, sem parceiro) é a mesma reta em ambos; a curvatura pertence à interação e aparece apenas quando o parceiro está ativo.

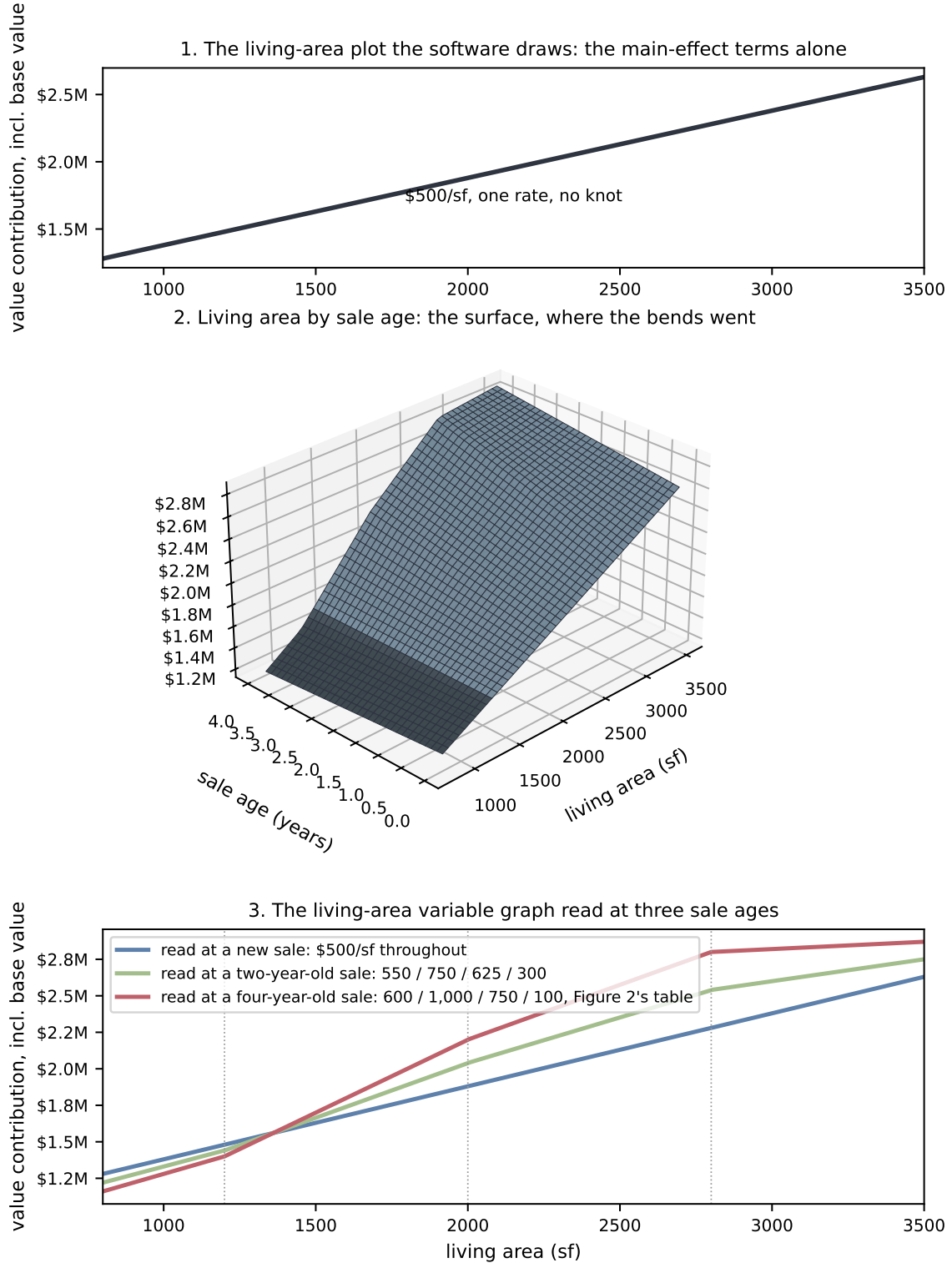


Figure 8: O mercado da Figura 2, com uma interação entre a área habitável e a idade de venda: $1,280,000 + 500 h(\text{gla} - 800) - 20,000 \text{ saleyrs} + [-25 h(1200 - \text{gla}) + 125 h(\text{gla} - 1200) - 62.5 h(\text{gla} - 2000) - 162.5 h(\text{gla} - 2800)] \times \text{saleyrs}$, idade de venda em anos de 0 a 4. Os painéis são descritos em seus títulos; aos quatro anos, o gráfico inferior apresenta exatamente as taxas da Figura 2, \$120,000, em um nível mais baixo. Criado para fins de demonstração, sem ajuste de parâmetros.

Escreva $\Delta_x(y_s)$ e $\Delta_x(y_c)$ para os ajustes de x , com y mantido no valor do imóvel objeto da avaliação y_s e no valor do imóvel comparável y_c , ou seja, $\Delta_x(y^*)$ em $y^* = y_s$ e em $y^* = y_c$; no exemplo, com x como área habitável e y como terreno, $\Delta_x(y_c) = \$240,000$ no terreno de 5.000 pés quadrados do imóvel comparável e $\Delta_x(y_s) = \$288,000$ nos 10.000 do imóvel objeto da avaliação. Então

$$\Delta_x(y_s) - \Delta_x(y_c) = \sum_{m \in M_{x,y}} \gamma_m [A_m(x_s) - A_m(x_c)] [C_m(y_s) - C_m(y_c)] Q_m(w),$$

enquanto a diferença total $f(x_s, y_s, w) - f(x_c, y_c, w)$ não envolve nenhuma escolha de y^* . A afirmação trata dessa divisão em duas características, uma parceira y com todo o restante mantido no mesmo w para ambas as propriedades; quando três ou mais características diferem entre as duas, a divisão do total entre elas é dependente do caminho da mesma forma ao longo de uma cadeia mais longa de mudanças de uma característica, e o teorema se aplica a cada passo da cadeia, com as características ainda não movidas mantidas em seus valores atuais. Em particular, com um único termo desse tipo $\gamma A(x) C(y)$ e sem fatores em w , os dois ajustes para x diferem por $\gamma [A(x_s) - A(x_c)] [C(y_s) - C(y_c)]$, o que não é 0 sempre que o movimento em x altera A e as duas propriedades diferem em C . Para $A = h(x - t)$ e $C = y$, isso é $\gamma [h(x_s - t) - h(x_c - t)] (y_s - y_c)$; para $A = h(x - t)$ e $C = h(y - s)$ — a forma do exemplo resolvido abaixo —, é $\gamma [h(x_s - t) - h(x_c - t)] [h(y_s - s) - h(y_c - s)]$.

Prova do Teorema 4. Agrupe os termos de f de acordo com o fato de conterem x ou y . Um termo que não contenha nem x nem y assume o mesmo valor em (x_s, y^*, w) e (x_c, y^*, w) e se cancela em $\Delta_x(y^*)$. Um termo que contenha y , mas não x , igualmente se cancela. Um termo que contenha x , mas não y , contribui para $\Delta_x(y^*)$ com um valor que não depende de y^* , portanto, se cancela em $\Delta_x(y_s) - \Delta_x(y_c)$. Um termo $m \in M_{x,y}$ contribui com $\gamma_m [A_m(x_s) - A_m(x_c)] C_m(y^*) Q_m(w)$ para $\Delta_x(y^*)$; definindo $y^* = y_s$ e $y^* = y_c$ e subtraindo-os, obtém-se a soma indicada. A diferença total é uma diferença entre dois valores da mesma função f e não menciona nenhum y^* . ■

Portanto, o valor da interação pertence ao par de características, e não a nenhuma delas isoladamente. Uma tabela que realiza ajustes em uma característica por vez com base nos valores dos imóveis comparáveis e outra que realiza ajustes com base nos valores do imóvel objeto da avaliação concordam quanto ao total, mas discordam quanto à divisão. Manter as demais características nos valores do imóvel objeto da avaliação é uma convenção defensável e é a que o programa utiliza; um relatório deve indicar qual convenção foi utilizada. Uma tabela residencial padrão, como a do Relatório Uniforme de Avaliação Residencial (URAR), não possui linha para interação. Feito uma característica de cada vez, os dois ajustes devem manter o par em extremos opostos — área habitável ajustada de acordo com o lote do imóvel objeto da avaliação, depois o lote de acordo com a área habitável do imóvel comparável, ou o inverso — de modo que a interação seja contabilizada uma vez e as linhas somem a diferença total do modelo. Com as contribuições calculadas diretamente, uma tabela também pode incluir a interação como uma linha separada — a diferença dos termos de interação entre o imóvel objeto da avaliação e o comparável — ao lado das linhas de cada característica; cada linha representa, então, um grupo de termos, e não é necessário definir uma ordem específica. No exemplo a seguir, as três linhas são: área habitável \$240,000, lote \$75,000 e área habitável por lote \$120,000, que somam o mesmo valor \$435,000. Com as interações, a taxa secante do par varia de acordo com o par de duas maneiras: uma vez por meio dos intervalos cruzados e outra vez por meio da posição do par entre os parceiros.

Um exemplo resolvido com uma interação

Mais uma vez, um mercado litorâneo, agora com duas características — área habitável e tamanho do lote — e uma interação entre elas. earth prints:

(Intercept)	900000
h(gla-1200)	600
h(gla-2400)	-350
h(gla-1200)*h(lot-6000)	0.03
lot	15

Conforme afirma o Teorema 3. A área habitável possui dois nós, 1.200 e 2.400, e três termos no “ M_{gla} ”: as duas articulações simples e a interação, cujo parceiro é “ $h(\text{lot} - 6000)$ ”. No segmento de 1.200 a 2.400, a articulação simples em 1.200 está ativa, assim como a articulação da interação em 1.200, portanto, a taxa nesse trecho é $600 + 0.03 h(\text{lot} - 6000)$: um gráfico variável de acordo com o tamanho do lote, constante em 600 para lotes de até 6.000 pés quadrados e aumentando em 3 centavos para cada pé quadrado adicional do lote. Acima de 2.400, o ponto de inflexão em 2.400 entra em vigor e a taxa é $250 + 0.03 h(\text{lot} - 6000)$. A taxa própria do lote é $15 + 0.03 h(\text{gla} - 1200)$ para lotes acima de 6.000 pés quadrados e 15 para lotes menores, de modo que a taxa de cada característica depende da quantidade da outra.

Dois pontos, duas tabelas. A tabela de taxas do programa para área habitável, com base nos dados, varia de 800 a 3.500 pés quadrados, sendo uma vez para um lote de 5.000 pés quadrados e outra para um lote de 10.000 pés quadrados. Cada coluna representa a inclinação do modelo em relação à área habitável, com o terreno mantido nesse único valor e em nenhum outro:

área habitável (sf)	preço por lote de 5.000 (\$por pé quadrado)	preço por lote de 10.000 (\$por pé quadrado)
800 a 1.200	0	0
1.200 a 2.400	600	720
2.400 a 3.500	250	370

No lote menor, o fator de parceria $h(5000 - 6000)$ é zero; portanto, a interação não contribui em nada e a tabela é a mesma que um modelo sem a interação forneceria; esse é o caso de “o termo pode se anular” do Corolário 6. No lote maior, o parceiro é 4,000; a interação adiciona $0.03 \times 4,000 = 120$ a cada segmento acima de 1.200, e o mesmo nó, 1.200, alimenta dois termos ativos, o que representa a falha do limite de “um por nó”.

Agora, os ajustes. O imóvel comparável tem 1.800 pés quadrados em um terreno de 5.000 pés quadrados, com um valor estimado de \$1,335,000; O imóvel objeto da avaliação tem 2.200 pés quadrados em um terreno de 10.000 pés quadrados, com ajuste de \$1,770,000. O total a ser explicado é de \$435,000. Ajuste primeiro a área habitável, com base no lote do imóvel comparável, e depois o lote com base na área habitável do imóvel objeto da avaliação. Cada ajuste corresponde à diferença entre os dois valores comparados; quando a mudança ocorre dentro de um mesmo segmento, essa diferença é igual à largura multiplicada pela taxa, conforme indicado na tabela:

	primeiro, a área habitável; depois, o terreno	primeiro o terreno, depois a área habitável
ajustes na área habitável	$400 \times 600 = 240,000$	$400 \times 720 = 288,000$
ajuste de lote	195,000	147,000
total	435,000	435,000

Os ajustes de lote correspondem a diferenças nas contribuições da mesma forma, e as alíquotas explicam isso; a própria taxa do lote se divide em faixas a partir de 6.000 pés quadrados: nos 2.200

pés quadrados do imóvel objeto da avaliação, a taxa do lote é \$15 abaixo do nó e \$45 acima dele, portanto, a variação de 5.000 para 10.000 é $1,000 \times 15 + 4,000 \times 45 = 195,000$, e não $5,000 \times 45$; nos imóveis comparáveis de 1.800 pés quadrados, o valor é $1,000 \times 15 + 4,000 \times 33 = 147,000$. Os totais coincidem, como o Teorema 4 determina que devem, e as divisões diferem em \$48,000, o que corresponde exatamente à fórmula do teorema: $0.03 \times [h(2200 - 1200) - h(1800 - 1200)] \times [h(10000 - 6000) - h(5000 - 6000)] = 0.03 \times 400 \times 4,000$. Esse valor de \$48,000 representa o valor de se ter os 400 pés quadrados extras da casa e os 4.000 pés quadrados extras do terreno juntos; ele não pertence a nenhuma das duas características, e quem for realizado em segundo lugar o recebe. A convenção do programa, em que as demais características são mantidas nos valores do imóvel objeto da avaliação, resulta na coluna da direita para a área habitável: \$288,000 a \$720 por pé quadrado, e seu relatório indica em que ponto a taxa foi registrada:

```
Feature: gla
Rates by range (data from 800 to 3500; nothing is reported outside it):
  800 .. 1200   rate 0.0
 1200 .. 2400   rate 720.0
 2400 .. 3500   rate 370.0
Fitted value at the knots (intercept and partners included):
 1200   1050000.0
 2400   1914000.0
Comparable at 1800: contribution 432000.0
Subject at 2200:    contribution 720000.0
Adjustment, range by range:
 1800 .. 2200    400 at 720.0 = 288000.0
Adjustment added to the comparable: 288000.0
Secant rate for the pair (one straight-line rate): 720.0
Check: segments sum to the adjustment.
```

Ambas as contribuições são calculadas com base no lote do imóvel objeto da avaliação, de 10,000 pés quadrados; no próprio lote do imóvel comparável, de 5,000 pés quadrados, a contribuição da área habitável é de \$360,000.

Um avaliador que repete o teste no lote de referência obtém um valor de \$240,000 e não está errado; o avaliador e o programa estão lendo a mesma superfície em dois pontos diferentes, e o relatório precisa indicar qual deles.

Em resumo: sem interações, um modelo MARS é uma tabela de taxas por característica, e todo argumento sobre uma taxa formulado para a regressão comum se aplica segmento por segmento. Com interações, uma taxa é uma superfície; o Teorema 3 indica exatamente como ela se curva, e o avaliador deve especificar em que ponto ela foi lida.

O programa

O programa `mars_rates.pl` — cujo código completo está impresso no apêndice — lê a tabela impressa do “earth” ou um modelo escrito como um termo em Prolog e produz a tabela de taxas, os valores nos nós, as duas contribuições e sua diferença, os ajustes, com sua explicação faixa por faixa, a taxa secante do par e uma verificação de que a soma das faixas resulta nos ajustes. Dado o intervalo de dados — a menor e a maior casa nas vendas —, ele não relata nenhuma taxa fora desse intervalo: a álgebra de uma dobradiça se estende até o infinito em um dos lados, mas as vendas

não, e uma taxa além delas seria uma extrapolação. Para o exemplo, com dados de 800 a 3.500 pés quadrados:

```
Feature: gla
Rates by range (data from 800 to 3500; nothing is reported outside it):
  800 .. 1200   rate 600
 1200 .. 2000   rate 1000
 2000 .. 2800   rate 750
 2800 .. 3500   rate 100
Fitted value at the knots (intercept and partners included):
 1200   1520000
 2000   2320000
 2800   2920000
Comparable at 1800: contribution 600000
Subject at 2400:    contribution 1100000
Adjustment, range by range:
 1800 .. 2000    200 at 1000 = 200000
 2000 .. 2400    400 at 750 = 300000
Adjustment added to the comparable: 500000
Secant rate for the pair (one straight-line rate): 833.3333333333334
Check: segments sum to the adjustment.
```

Nesse bloco, há dois tipos de números. As contribuições correspondem apenas aos termos relativos à área habitável, com o intercept e os termos de todas as outras características excluídos: \$600,000 e \$1,100,000 diferem exatamente pelos ajustes. Os valores nos nós são valores ajustados, incluindo a interceptação, e, em um modelo com interações, também os termos dos parceiros nesse ponto; aqui, \$1,520,000, correspondente a 1.200 pés quadrados, representa a interceptação, pois todas as interações são nulas nesse ponto. Os valores ajustados no comparável e no sujeito, \$2,120,000 e \$2,620,000, apresentam a interceptação da mesma forma. O relatório identifica os valores dos nós como valores ajustados para que o leitor não os interprete como contribuições.

Esse bloco é o que deve constar no apêndice de um relatório: as taxas, os nós e os cálculos entre uns e outros, de forma que um revisor possa refazê-los manualmente. Os 69 testes do programa verificam a regra de sinal, a regra de interação, a consistência dos segmentos com ajustes e o analisador sintático para a saída do Earth, e são aprovados no Trealla, no Prolog da revista, no SWI-Prolog e no Scyer Prolog. Para os leitores que trabalham com R, a mesma leitura está disponível sem precisar sair do ambiente: o arquivo ‘mars_rates.R’, publicado junto com o programa, recebe um objeto ‘earth’ ou sua tabela impressa e exibe o mesmo bloco, com as taxas limitadas ao intervalo de dados; o Prolog continua sendo a referência verificada, e o arquivo R realiza suas próprias verificações em relação aos exemplos deste suplemento. O programa, seus testes e o script da figura são publicados com esta edição como um arquivo para download junto ao PDF, sob a Licença Pública Geral Affero do GNU, versão 3 ou posterior.

Por que o MARS, e o que este suplemento deixa para outras entradas

A revista utiliza o método MARS por três motivos, e são esses motivos que permitem a existência deste suplemento. Objetividade: os nós são posicionados onde as vendas os colocam, por meio

de um procedimento definido com uma regra de poda especificada (a etapa posterior que remove termos que não merecem seu lugar), e nada sobre a forma de um grafo variável é decidido antecipadamente além dessas configurações definidas (o grau máximo de interação, a penalização de poda, o espaçamento mínimo entre os nós). Descobribilidade: a passagem direta pesquisa cada característica e cada nó candidato, incluindo interações até o grau definido, e relata o que encontrou — algo que nenhum método que parte de uma forma pré-escolhida é capaz de fazer. Interpretabilidade: taxas constantes ao longo dos intervalos escolhidos pelos dados e interações construídas a partir das mesmas articulações são o que permite que o modelo seja escrito como uma tabela de taxas e que um ajuste seja explicado como taxa multiplicada pela amplitude. Dois outros métodos também produzem taxas que variam ao longo do intervalo de uma característica, e eles são diferentes um do outro. O primeiro, a regressão segmentada (“broken-stick”), toma uma variável e um número de pontos de ruptura escolhidos pelo analista e estima onde esses pontos se situam, com um erro-padrão (uma medida de quanto a estimativa poderia variar com outras vendas) para cada um; entre os pontos de ruptura, a taxa é constante, como no MARS. O segundo, um modelo aditivo com restrição de forma, realiza o ajuste de uma curva suave em vez de segmentos retos, forçado a assumir uma forma imposta pelo analista — por exemplo, que o valor nunca diminua à medida que a área habitável aumenta, ou que cada pé quadrado adicionado acrescente menos do que o anterior. Nenhum dos dois é utilizado aqui. Cada um responde a uma pergunta que este suplemento não faz, e cada um abre mão de pelo menos uma das três propriedades: a regressão segmentada abre mão da descobribilidade, porque a variável e o número de pontos de ruptura são escolhidos antecipadamente; o modelo com restrição de forma abre mão da interpretabilidade, pois uma curva não possui taxas constantes para tabulação, e da objetividade, pois sua forma é imposta. Este suplemento analisa o modelo produzido pelo MARS; a escolha do método e a estabilidade dos nós e das taxas que o MARS identifica de um conjunto de vendas para o outro são temas para artigos separados.

O que isto não resolve

As taxas são as do modelo, e os quatro conceitos estatísticos se aplicam a elas sem alterações: uma taxa aproxima a expectativa condicional apenas na medida em que a forma do modelo permite (*Expectativa Condicional*); ela pode conter o valor de uma variável omitida (*Viés de Variável Omitida*); pode ser distorcida quando uma característica varia junto com o erro estrutural (*Endogeneidade*); e pode não ser determinada pelas vendas de forma alguma, por mais numerosas que sejam, quando duas características sempre variam juntas (*Identificação de Parâmetros*). O MARS identifica onde uma taxa muda apenas quando as vendas apresentam o contraste necessário para demonstrá-la; um nó é uma afirmação sobre o mercado e sua validade depende exclusivamente das vendas em ambos os lados dele. O que este suplemento acrescenta é mais específico: dado o modelo, eis como expressar o que ele afirma.

References.

- Craytor, W. B. (2026). earthUI: An Interactive Interface for the earth (MARS) Package. *Valuation Engineer Journal*, 1(1). <https://doi.org/10.67330/7fj41b65>
- Friedman, J. H. (1991). Multivariate Adaptive Regression Splines. *The Annals of Statistics*, 19(1), 1–67. <https://doi.org/10.1214/aos/1176347963>
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (2nd ed.), §9.4, Multivariate Adaptive Regression Splines. Springer.
- Milborrow, S. (2024a). earth: Multivariate Adaptive Regression Splines. R package. <https://CRAN.R-project.org/package=earth>

Milborrow, S. (2024b). plotmo: Plot a Model's Residuals, Response, and Partial Dependence Plots. R package. <https://CRAN.R-project.org/package=plotmo>
 Milborrow, S. (n.d.). Notes on the earth Package. <http://www.milbo.org/doc/earth-notes.pdf>

Cross-references: conditional expectation; omitted variable bias; endogeneity; parameter identification; hedonic regression; implicit price.

Addendum: Prolog Formalization

The following machine-readable companion (`mars_rates.pl`) formalizes this entry in the journal's Prolog knowledge base. It is also published as a browsable galley alongside this article.

```
% SPDX-License-Identifier: AGPL-3.0-or-later
% Copyright (C) 2026 William Bert Craytor. Published by The Valuation Engineer
% Journal (Pacific Vista Net). This program is free software: you can
% redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU Affero General
% Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3
% of the License, or (at your option) any later version. It is distributed
% WITHOUT ANY WARRANTY, without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
% FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE; see the COPYING file beside it or
% <https://www.gnu.org/licenses/agpl-3.0.html>.

/* mars_rates.pl -- mars-rates: from a fitted MARS model to the rates, value
   contributions and adjustments an appraiser reports.

A MARS model, as the R package earth prints it, is an intercept plus a sum
of terms, each a coefficient times a product of basis functions:

    h(x - t)    a hinge, zero for x below the knot t, rising with slope +1 above
    h(t - x)    a reflected hinge, zero above t, rising to the LEFT: slope -1 in x
    x           a linear term
    h(x-t)*h(y-s) an interaction, the product of two factors
```

The appraiser does not report basis functions. The appraiser reports, for a feature, the RATE the market pays per unit in each range (the slope), the VALUE CONTRIBUTION of the quantity a property has (the level), and the ADJUSTMENT: the amount added to a comparable's contribution to make it equal to the subject's. This program turns the one into the other, and checks that they agree.

The sign rule that hand-built tables get wrong: in a range, the rate is the sum of the coefficients of the active right hinges MINUS the sum of the coefficients of the active reflected hinges (plus any linear term's coefficient). A negative coefficient on $h(5 - x)$ contributes a POSITIVE slope below 5.

Representation. A model is
`model(Intercept, Terms)`
 where each term is `term(Coef, Factors)` and each factor is
`hinge(Var, Knot)` `h(Var - Knot)`
`rhinge(Var, Knot)` `h(Knot - Var)`
`linear(Var)` `Var`
 A point is a list of `Var = Value` pairs, e.g. `[gla = 1800, lot = 6000]`.

Entry points:

```
value(+Model, +Point, -Y)                    the fitted value at a point
```

```

contribution(+Model, +Var, +Point, -C) the part of the value that the
                                     terms involving Var contribute
rate(+Model, +Var, +Point, -R)         slope in Var at the point (other
                                     variables held at the point)
knots(+Model, +Var, -Knots)            the sorted knots on Var
rate_table(+Model, +Var, +Point, -Rows)
                                     rows range(Lo, Hi, Rate), Lo/Hi
                                     numbers or the atoms minus_inf,
                                     plus_inf; other variables fixed
                                     at the point
rate_table(+Model, +Var, +Point, +data(Lo, Hi), -Rows)
                                     the same table clamped to the
                                     data range: the first row starts
                                     at Lo, the last ends at Hi, rows
                                     outside the data are dropped.
                                     Rates outside the data are
                                     extrapolation and are not
                                     reported
knot_values(+Model, +Var, +Point, -Pairs)
                                     Knot-Value at each knot
adjustment(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -A)
                                     amount added to the comparable's
                                     contribution (Var = CompQ) to
                                     equal the subject's (Var = SubjQ)
segments(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -Segs)
                                     the adjustment as the appraiser
                                     explains it: seg(Lo, Hi, Rate,
                                     Width, Amount) per range crossed
pair_rate(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -R)
                                     the pair's secant rate: the one rate a straight line
↪ would
                                     need between the two quantities:
                                     adjustment over width
consistent(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ)
                                     the segments sum to the adjustment
parse_earth(+Atom, -Model)           read earth's printed coefficient
                                     table (see parse_earth below)
print_report(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ)

Plain ISO Prolog: runs under Trealla, SWI-Prolog and Scryer Prolog. No
modules, no format/2, no double-quoted strings. Consult this file, then
tests/harness.pl and tests/test_mars_rates.pl, and call run_tests.      */

/* ===== */
/* 1. Evaluation */
/* ===== */

point_value(Var, Point, X) :- mr_member(Var = X, Point), !.
point_value(Var, _, _) :- throw(error(missing_variable(Var), point_value/3)).

factor_value(hinge(Var, T), Point, V) :- point_value(Var, Point, X), D is X - T, V is max(0, D).
factor_value(rhinge(Var, T), Point, V) :- point_value(Var, Point, X), D is T - X, V is max(0, D).
factor_value(linear(Var), Point, V) :- point_value(Var, Point, V).

term_value(term(Coef, Factors), Point, V) :-
    factors_product(Factors, Point, P), V is Coef * P.

factors_product([], _, 1).
factors_product([F | Fs], Point, P) :- factor_value(F, Point, V), factors_product(Fs, Point, P0), P
    ↪ is V * P0.

```

```

value(model(Intercept, Terms), Point, Y) :-
    terms_sum(Terms, Point, S), Y is Intercept + S.

terms_sum([], _, 0).
terms_sum([T | Ts], Point, S) :- term_value(T, Point, V), terms_sum(Ts, Point, S0), S is S0 + V.

/* The contribution of a variable at a point: the terms that involve it. The
   intercept and the terms in other variables are the level the feature is
   measured against; an adjustment never depends on them. */

involves(term(_, Factors), Var) :- mr_member(F, Factors), factor_var(F, Var), !.
factor_var(hinge(V, _), V). factor_var(rhinge(V, _), V). factor_var(linear(V), V).

contribution(model(_, Terms), Var, Point, C) :-
    findall(V, ( mr_member(T, Terms), involves(T, Var), term_value(T, Point, V) ), Vs),
    mr_sum(Vs, C).

/* ===== */
/* 2. Rates (slopes) */
/* ===== */

/* d/dVar of a term = Coef * (slope of the factor in Var) * (product of the
   other factors' values). A hinge is active strictly above its knot, a
   reflected hinge strictly below; at the knot itself the slope is taken from
   the right, which is the convention of the rate table below. */

factor_slope(hinge(Var, T), Var, Point, S) :- !, point_value(Var, Point, X), ( X >= T -> S = 1 ; S
    ↪ = 0 ).
factor_slope(rhinge(Var, T), Var, Point, S) :- !, point_value(Var, Point, X), ( X < T -> S = -1 ; S
    ↪ = 0 ).
factor_slope(linear(Var), Var, _, 1) :- !.
factor_slope(_, _, _, 0).

term_slope(term(Coef, Factors), Var, Point, S) :-
    term_slope_(Factors, Var, Point, [], Coef, S).

term_slope_([], _, _, _, 0).
term_slope_([F | Fs], Var, Point, Seen, Coef, S) :-
    ( factor_var(F, Var) ->
        factor_slope(F, Var, Point, S1),
        mr_append(Seen, Fs, Others), factors_product(Others, Point, P),
        S1 is Coef * S1 * P
    ; S1 = 0 ),
    term_slope_(Fs, Var, Point, [F | Seen], Coef, S0),
    S is S0 + S1.

rate(model(_, Terms), Var, Point, R) :-
    findall(S, ( mr_member(T, Terms), term_slope(T, Var, Point, S) ), Ss),
    mr_sum(Ss, R).

/* ===== */
/* 3. Knots, ranges and the rate table */
/* ===== */

knots(model(_, Terms), Var, Knots) :-
    findall(K, ( mr_member(term(_, Fs), Terms), mr_member(F, Fs), knot_of(F, Var, K) ), Ks),
    sort(Ks, Knots).

knot_of(hinge(Var, K), Var, K).
knot_of(rhinge(Var, K), Var, K).

```

```

/* One row per range between consecutive knots, the rate measured at a point
   inside the range (the midpoint, or one unit past the last knot). */

rate_table(Model, Var, Point, Rows) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    bounds(Knots, Bounds),
    rows(Bounds, Model, Var, Point, Rows).

bounds([], [minus_inf-plus_inf]).
bounds([K | Ks], [minus_inf-K | Rest]) :- bounds_(K, Ks, Rest).
bounds_(K, [], [K-plus_inf]).
bounds_(K, [K2 | Ks], [K-K2 | Rest]) :- bounds_(K2, Ks, Rest).

/* The table over the observed data only. A hinge's algebra runs to infinity
   on one side; the sales do not. Rates beyond the smallest and largest
   observed quantity are extrapolation, so the report clamps the end rows to
   the data range and drops any row that lies wholly outside it. */

rate_table(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), Rows) :-
    rate_table(Model, Var, Point, Rows0),
    clamp_rows(Rows0, DLo, DHi, Rows).

clamp_rows([], _, _, []).
clamp_rows([range(Lo, Hi, R) | Rs], DLo, DHi, Out) :-
    clamp_lo(Lo, DLo, Lo1), clamp_hi(Hi, DHi, Hi1),
    ( Lo1 < Hi1 -> Out = [range(Lo1, Hi1, R) | Rest] ; Out = Rest ),
    clamp_rows(Rs, DLo, DHi, Rest).

clamp_lo(minus_inf, DLo, DLo) :- !.
clamp_lo(Lo, DLo, X) :- ( Lo < DLo -> X = DLo ; X = Lo ).
clamp_hi(plus_inf, DHi, DHi) :- !.
clamp_hi(Hi, DHi, X) :- ( Hi > DHi -> X = DHi ; X = Hi ).

rows([], _, _, _, []).
rows([Lo-Hi | Bs], Model, Var, Point, [range(Lo, Hi, R) | Rows]) :-
    probe(Lo, Hi, X), set_point(Var, X, Point, P), rate(Model, Var, P, R),
    rows(Bs, Model, Var, Point, Rows).

probe(minus_inf, plus_inf, 0) :- !.
probe(minus_inf, Hi, X) :- !, X is Hi - 1.
probe(Lo, plus_inf, X) :- !, X is Lo + 1.
probe(Lo, Hi, X) :- X is (Lo + Hi) / 2.

set_point(Var, X, Point, [Var = X | Rest]) :- mr_delete_var(Point, Var, Rest).

knot_values(Model, Var, Point, Pairs) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    findall(K-Y, ( mr_member(K, Knots), set_point(Var, K, Point, P), value(Model, P, Y) ), Pairs).

/* ===== */
/* 4. Adjustments and their explanation */
/* ===== */

adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A) :-
    set_point(Var, CompQ, Point, PC), set_point(Var, SubjQ, Point, PS),
    value(Model, PC, YC), value(Model, PS, YS), A is YS - YC.

/* The path from the comparable's quantity to the subject's, cut at every knot
   between them; each piece is a width at a rate. Going down (subject smaller
   than comparable) the widths are negative, so the amounts are, and the sum
   is still the adjustment as defined: added to the comparable. */

```

```

segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    Lo is min(CompQ, SubjQ), Hi is max(CompQ, SubjQ),
    findall(K, ( mr_member(K, Knots), K > Lo, K < Hi ), Inner),
    mr_append([Lo | Inner], [Hi], Cuts),
    ( SubjQ >= CompQ -> Dir = 1 ; Dir = -1 ),
    pieces(Cuts, Model, Var, Point, Dir, Segs).

pieces([], _, _, _, _, []) :- !.
pieces([A, B | Cs], Model, Var, Point, Dir, [seg(A, B, R, W, Amt) | Segs]) :-
    probe(A, B, X), set_point(Var, X, Point, P), rate(Model, Var, P, R),
    W is Dir * (B - A), Amt is R * W,
    pieces([B | Cs], Model, Var, Point, Dir, Segs).

/* The pair's secant rate. Between two quantities the only single rate
consistent with the MARS contributions is the chord, adjustment over
width: the model's rates averaged by the width of each range crossed. An
ordinary regression, one rate for the feature, must serve every pair with
one number and so cannot reproduce these. Printed beside the
MARS rates it shows what a single rate would have had to be for THIS
comparable and THIS subject, and how far each range's rate departs from
it. Undefined when the two quantities are equal. */

pair_rate(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, R) :-
    CompQ =\= SubjQ,
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A), R is A / (SubjQ - CompQ).

consistent(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) :-
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A),
    segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs),
    findall(Amt, mr_member(seg(_, _, _, _, Amt), Segs), Amts), mr_sum(Amts, S),
    abs(S - A) < 0.000001.

/* ===== */
/* 5. Reading earth's printed coefficients */
/* ===== */

/* earth prints its model as a table, one term per line, e.g.

    (Intercept)      10
    h(x-2)           3
    h(5-x)           -1.5
    h(x-8)            0.8
    h(x-2)*h(y-3)     0.4
    x                1.2

parse_earth/2 takes that table as one atom (lines separated by newline
characters) and returns the model. Whitespace is free; a coefficient is a
decimal number with an optional sign; variable names are letters, digits,
dots and underscores, as R prints them. */

parse_earth(Atom, model(Intercept, Terms)) :-
    atom_chars(Atom, Chars), split_lines(Chars, Lines),
    parse_lines(Lines, 0, Intercept, Terms).

split_lines(Chars, Lines) :- split_lines_(Chars, [], Lines).
split_lines_([], Acc, [Line]) :- mr_reverse(Acc, Line).
split_lines_(['\n' | Cs], Acc, [Line | Lines]) :- !, mr_reverse(Acc, Line), split_lines_(Cs, [],
    ↪ Lines).
split_lines_([C | Cs], Acc, Lines) :- split_lines_(Cs, [C | Acc], Lines).

```

```

parse_lines([], I, I, []).
parse_lines([L | Ls], IO, I, Terms) :-
    strip(L, S),
    ( S == [] -> parse_lines(Ls, IO, I, Terms)
    ; split_ws(S, Name, CoefChars), number_chars_safe(CoefChars, Coef),
      ( Name = ['(', 'I', 'n', 't', 'e', 'r', 'c', 'e', 'p', 't', ' ') ->
        parse_lines(Ls, Coef, I, Terms)
      ; parse_factors(Name, Factors),
        Terms = [term(Coef, Factors) | Rest], parse_lines(Ls, IO, I, Rest) ) ).

strip(L, S) :- drop_ws(L, L1), mr_reverse(L1, R1), drop_ws(R1, R2), mr_reverse(R2, S).
drop_ws([C | Cs], S) :- ws(C), !, drop_ws(Cs, S).
drop_ws(S, S).
ws(' '). ws('\t'). ws('\r').

/* the coefficient is the LAST whitespace-separated token; the name is what
   precedes it and may itself contain spaces (earth prints h(x- -3) for a
   negative knot) */
split_ws(S, Name, Coef) :-
    mr_reverse(S, R), split_ws(R, [], Coef, NameR), % consuming the reversed line puts the
    ↪ coefficient back in order
    mr_reverse(NameR, Name0), strip(Name0, Name).
split_ws([C | Cs], Acc, Coef, Rest) :- ws(C), !, Coef = Acc, Rest = Cs.
split_ws([C | Cs], Acc, Coef, Rest) :- split_ws(Cs, [C | Acc], Coef, Rest).
split_ws([], Acc, Acc, []).

number_chars_safe(Chars, N) :-
    catch(number_chars(N, Chars), _, fail), !.
number_chars_safe(Chars, N) :- % "-.5" and ".5", which earth can print
    ( Chars = ['- ', '.' | R] -> number_chars(N, ['- ', '0', '.' | R])
    ; Chars = ['.' | R] -> number_chars(N, ['0', '.' | R]) ).

/* factors are separated by '*' */
parse_factors(Chars, [F | Fs]) :-
    split_star(Chars, First, Rest), parse_factor(First, F),
    ( Rest == [] -> Fs = [] ; parse_factors(Rest, Fs) ).

split_star(Chars, First, Rest) :- split_star(Chars, [], First, Rest).
split_star(['*' | Cs], Acc, First, Cs) :- !, mr_reverse(Acc, First).
split_star([C | Cs], Acc, First, Rest) :- split_star(Cs, [C | Acc], First, Rest).
split_star([], Acc, First, []) :- mr_reverse(Acc, First).

/* h(x-2) / h(2-x) / x -- inside the parentheses, the side that is a number
   is the knot and the other side the variable */
parse_factor(['h', '(' | Cs], F) :- !,
    mr_reverse(Cs, [')' | RevInner]), mr_reverse(RevInner, Inner),
    split_minus(Inner, Left, Right),
    ( number_chars_safe(Right, K) -> atom_chars(Var, Left), F = hinge(Var, K)
    ; number_chars_safe(Left, K) -> atom_chars(Var, Right), F = rhinge(Var, K) ).
parse_factor(Cs, linear(Var)) :- atom_chars(Var, Cs).

/* the minus that separates the two sides is the last one not at position 0
   and not following an 'e' (so "x-2", "5-x", "gla-1500" and "h(x- -3)" all
   read); a leading '-' belongs to a negative knot */
split_minus(Chars, Left, Right) :-
    mr_length(Chars, N), N1 is N - 1,
    minus_positions(Chars, 0, Ps), mr_member(P, Ps), P > 0, P < N1,
    mr_take(P, Chars, Left0), strip(Left0, Left),
    P2 is P + 1, mr_drop(P2, Chars, Right0), strip(Right0, Right),
    Left \== [], Right \== [], !.

```

```

minus_positions([], _, []).
minus_positions(['-' | Cs], I, [I | Ps]) :- !, I1 is I + 1, minus_positions(Cs, I1, Ps).
minus_positions([_ | Cs], I, Ps) :- I1 is I + 1, minus_positions(Cs, I1, Ps).

/* ===== */
/* 6. A report */
/* ===== */

print_report(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) :-
    write('Feature: '), write(Var), nl,
    write('Rates by range:'), nl,
    rate_table(Model, Var, Point, Rows),
    print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows).

/* The same report over the observed data: print_report/6 takes data(Lo, Hi),
the smallest and largest observed quantity of Var, and reports no rate
outside it. */

print_report(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), CompQ, SubjQ) :-
    write('Feature: '), write(Var), nl,
    write('Rates by range (data from '), write(DLo), write(' to '), write(DHi), write('; nothing is
↳ reported outside it):'), nl,
    rate_table(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), Rows),
    print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows).

print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows) :-
    ( mr_member(range(Lo, Hi, R), Rows), write(' '), write(Lo), write(' .. '), write(Hi), write('
↳ rate '), write(R), nl, fail ; true ),
    write('Fitted value at the knots (intercept and partners included):'), nl,
    knot_values(Model, Var, Point, KVs),
    ( mr_member(K-Y, KVs), write(' '), write(K), write(' '), write(Y), nl, fail ; true ),
    set_point(Var, CompQ, Point, PC), set_point(Var, SubjQ, Point, PS),
    contribution(Model, Var, PC, CC), contribution(Model, Var, PS, CS),
    write('Comparable at '), write(CompQ), write(': contribution '), write(CC), nl,
    write('Subject at '), write(SubjQ), write(': contribution '), write(CS), nl,
    segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs),
    write('Adjustment, range by range:'), nl,
    ( mr_member(seg(A, B, R2, W, Amt), Segs), write(' '), write(A), write(' .. '), write(B), write('
↳ '), write(W), write(' at '), write(R2), write(' = '), write(Amt), nl, fail ; true ),
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Adj),
    write('Adjustment added to the comparable: '), write(Adj), nl,
    ( pair_rate(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, OR) ->
        write('Secant rate for the pair (one straight-line rate): '), write(OR), nl ; true ),
    ( consistent(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) -> write('Check: segments sum to the adjustment
↳ .') ; write('CHECK FAILED') ), nl.

/* ===== */
/* 7. List helpers (own names; no library assumed) */
/* ===== */

mr_member(X, [X | _]).
mr_member(X, [_ | T]) :- mr_member(X, T).

mr_append([], L, L).
mr_append([H | T], L, [H | R]) :- mr_append(T, L, R).

mr_reverse(L, R) :- mr_reverse_(L, [], R).
mr_reverse_([], R, R).
mr_reverse_([H | T], A, R) :- mr_reverse_(T, [H | A], R).

```

```

mr_sum([], 0).
mr_sum([X | Xs], S) :- mr_sum(Xs, S0), S is S0 + X.

mr_length([], 0).
mr_length(_ | T], N) :- mr_length(T, N0), N is N0 + 1.

mr_take(0, _, []) :- !.
mr_take(N, [H | T], [H | R]) :- N1 is N - 1, mr_take(N1, T, R).

mr_drop(0, L, L) :- !.
mr_drop(N, [_ | T], R) :- N1 is N - 1, mr_drop(N1, T, R).

mr_delete_var([], _, []).
mr_delete_var([V = _ | T], V, R) :- !, mr_delete_var(T, V, R).
mr_delete_var([H | T], V, [H | R]) :- mr_delete_var(T, V, R).

```