

# 人类理解 MARS 的障碍 (The Barrier to Human Understanding of MARS)

把 MARS 模型读作单价、价值贡献与调整

*Foundations • The Valuation Engineer*

William Bert Craytor • October 1, 2026

Version 1.2.0

DOI: [10.67330/qmnctv78](https://doi.org/10.67330/qmnctv78)

这是“基础”章节的补充内容，而非概念条目。其标题指出了编辑经过多年间接观察后所认识到的一个障碍：那些能够轻松解读回归系数的估价师，在看到 MARS 程序输出的铰链项列表时却会停下脚步，因为该列表中的内容看起来都不像单价。紧随本补充内容之后的四篇统计条目（条件期望、遗漏变量偏差、内生性与参数识别）均探讨了回归模型赋予特征的单价。本刊自身的建模采用多变量自适应回归样条（MARS; Friedman 1991）<sup>1</sup>，该方法并非为每个特征报告一个单价，而是为每个区间报告一个单价；而从 MARS 程序输出的结果到估价师能够论证的单价表之间，存在一个关键步骤，若在此处手动构建表格，结果便会出现偏差。本增刊阐述了这一路径、关键步骤，并提供了一个能够沿此路径运行并自检结果的程序。

**形式定义。** 在 MARS 模型中，拟合值由截距加上各项之和组成，每项均为系数乘以特征的铰链函数之积。拟合值即模型对价格的估计值。对于单个特征，在其他特征保持恒定的情况下，拟合值由一系列直线段组成。这些线段的交点即为节点。该特征在其取值范围内价值贡献的图形即为变量图。其在每个范围内的斜率即为单价：即该范围内每单位特征值对应的拟合值变化量；该特征某数量下的值贡献是模型中该特征在该数量处各项的总和；在示例中，当面积为 1,200 平方英尺时，所有这些项均为零，因此贡献值从该点开始计算，且在此值以下为负值；模型未必包含该数量，只有贡献值之间的差异（即调整值）才具有实际意义；而从可比实例到估价对象的调整值，是指为使可比实例的贡献值等于估价对象的贡献值而需加上的数值，该数值等于在两个数量区间内，单价乘以宽度的总和。如此定义的单价即为该模型的单价；只有当该模型被接受为对销售情况的公正描述时，该单价才被视为市场支付的单价，而本补充内容之后的条目则涉及何时该接受是合理的。

## 为什么需要这篇补充

在 earthUI (Craytor 2026) 中，或在 R 包 earth (Milborrow 2024a) 中，符合 MARS 模型的估价师会收到如下条款列表：

|               |         |
|---------------|---------|
| (Intercept)   | 1520000 |
| $h(1200-gla)$ | -600    |
| $h(gla-1200)$ | 1000    |
| $h(gla-2000)$ | -250    |
| $h(gla-2800)$ | -650    |

没有人会报告这一点。进入销售网格的是调整值：即估价对象价值贡献减去可比实例的价值贡献。报告中会讨论每平方英尺的单价，这是论证 MARS 模型合理性的一个步骤。从书面条款到这

<sup>1</sup>MARS is a registered trademark of Minitab, LLC. It is used in this Journal as the name of the statistical method introduced by Friedman (1991), and the software referred to is the R package earth, whose notation this Journal follows: hinges are written  $h(x - t)$  and  $h(t - x)$  and models are shown as earth prints them. Salford's MARS writes the same functions as numbered basis functions,  $BF1 = \max(0, X - t)$  and so on, and differs from earth in such details of notation, not in the method.

些数字的推导过程虽然简短，但其中有一个环节容易导致手动制作的表格出现错误；如果模型生成的数字无法向审核人员解释清楚，那么使用该模型的全部意义就荡然无存了。

## 简明版：四个区间，四个单价

将居住面积作为单一线性项纳入线性回归模型，会得出适用于整个市场的统一单价；这是传统评估中回归分析的做法，也是本补充说明中“普通回归”的含义。MARS 允许单价根据成交数据的变化而变化。在示例中的沿海市场中，1,200 平方英尺以内的居住面积可能价值 \$600 每平方英尺；1,200 至 2,000 平方英尺区间内为 \$1,000 每平方英尺；2,000 至 2,800 平方英尺区间内为 \$750 每平方英尺；而超过 2,800 平方英尺的部分则仅为 \$100 每平方英尺。这就是全部的区别，也是房产经纪人一眼就能看出的关键：市场对能将小房子变成家庭住宅的空间出价最高，对多出的那间房出价较低，而对于超出社区买家需求范围的空间，则几乎不愿出价。

考虑到这些单价，其余的计算都是估价师已经完成的算术运算。一套 1,800 平方英尺的可比实例与一套 2,400 平方英尺的估价对象之间相差 600 平方英尺，而 2,000 平方英尺这一节点正位于两者之间。对可比实例进行的调整值为：估价对象的拟合值减去可比实例的拟合值，即  $\$2,620,000 - \$2,120,000 = \$500,000$ ，这也等于估价对象的居住面积贡献值减去可比实例的居住面积贡献值，即  $\$1,100,000 - \$600,000$ 。单价可解释这一过程：该变动在 \$1,000 处跨越 200 平方英尺，随后在 \$750 处跨越 400 平方英尺，总计 \$500,000。图 3 展示了这一情况：基于拟合值（模型对具有这些特征的房屋给出的价格），该值从 \$1,280,000（800 平方英尺，数据中面积最小的房屋）到约 \$3 million（3,500 平方英尺，面积最大的房屋），其中大部分涨幅出现在 2,800 平方英尺之前。

一条通过这两个点的直线在该运动中可能采用的唯一单价，就是连接这两点的单价，\$500,000 除以 600 平方英尺，即约 \$833 每平方英尺：该对点的 割线单价，即该次移动的有效单价（或混合单价）：该模型各单价按穿越的每个区间宽度具有不同权重的平均值。这并非模型中的单一单价，且对于下一对数据，其平均值也会不同。普通回归分析仅针对居住面积设定一个单价，必须用该单一数值来处理每对数据，因此无法再现这些逐对平均值；而单一单价所做的正是：对模型所预测的市场变化进行平均。

读到这里的读者已经掌握了方法：计算两个数值之间的差，然后通过查阅各区间的费率、按这些费率计算与估价对象的可比实例，并将其相加来解释这一差值。下文则面向希望了解以下内容的读者：这些单价为何如此设定、其中存在何种陷阱、当各项特征相互作用时会发生哪些变化，以及程序如何验证运算结果；单价表和调整方式均保持不变。

## 细致版：铰链函数与容易漏掉的符号

将一个变量在其定义域内值的变化贡献图称为 变量图。它并非日常意义上那种光滑弯曲的曲线；而是一条分段线性图，在节点之间呈直线，仅在节点处发生弯曲。MARS 通过“铰链”构建该图形；Friedman (1991) 将其表示为截断幂函数，而“铰链”是后续文献中最终确立的名称 (Milborrow, 未注明日期)；Hastie、Tibshirani 和 Friedman (2009, §9.4) 将位于同一节点的两个铰链称为“反射对”。

定义（铰链）。铰链是一个单变量函数  $x$ ，具有一个断点，称为其 节点  $t$ ，该函数在节点的一侧取值为零，而在另一侧的取值等于到该节点的距离。在任何节点处都有两个铰链，每侧各一个，如图1 所示：

$$h(x - t) = \max(0, x - t) = \begin{cases} 0 & x \leq t, \\ x - t & x > t, \end{cases} \quad h(t - x) = \max(0, t - x) = \begin{cases} t - x & x < t, \\ 0 & x \geq t. \end{cases}$$

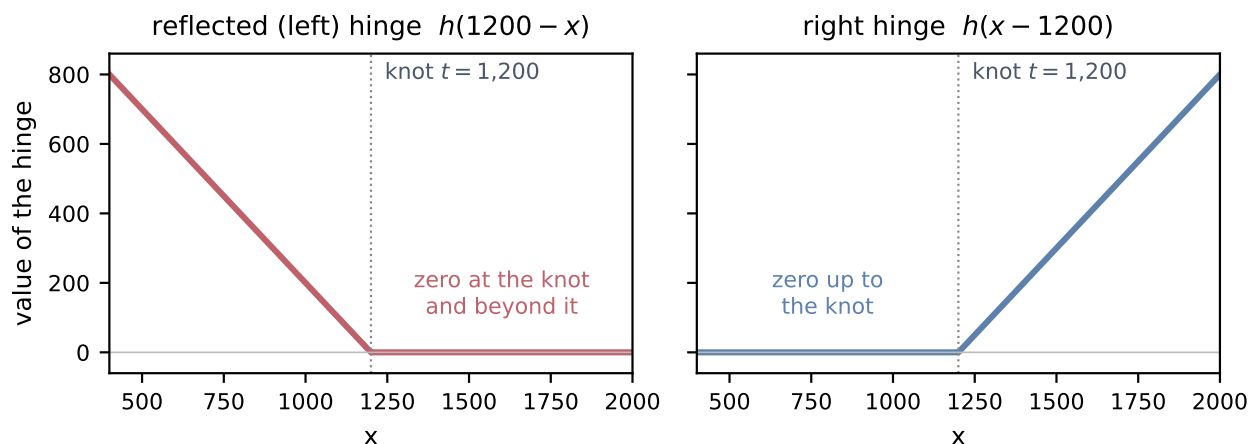


Figure 1: 两个铰链函数，其结点位于  $t = 1,200$ ：反射（左）铰链  $h(1200 - x)$ ，从左向右递减，在节点处为零，节点之后也为零；右铰链  $h(x - 1200)$ ，在节点之前为零，节点之后从左向右递增。这些是基本铰链函数；在模型中，每个铰链函数都会乘以一个系数，该系数可能会反转其方向。

第一个， $h(x - t)$ ，是右铰链：在节点处之前为零，在节点之后从左向右递增。第二个， $h(t - x)$ ，是反射（或左）铰链：在节点处之前从左向右递减，在节点处及之后为零。二者均属于同一意义上的铰链；它们的区别仅在于在节点的哪一侧非零。这些方向描述的是图1中从  $x$  轴绘制的“裸铰链”，仅此而已。在模型中，铰链会乘以一个系数（该系数可能是负值），并与其他项相加；因此，基于右铰链构建的项可能从左向右递减，而基于反向铰链构建的项可能递增，且变量图在其他项所决定的高度处与节点相交。本补充说明中所述的所有方向均从左向右读取。铰链不能单独使用。在MARS模型中，每个铰链都会乘以一个系数，然后将各项相加；模型的斜率（即单价）正是根据这些系数计算得出的，而非基于任何单个铰链：逐区间累积计算，每个区间的单价是前一区间单价经由位于两者之间的铰链的系数调整后的结果。铰链是MARS模型中处理单个变量的唯一基本单元；变量图形中的每个弯折点都是某个铰链的节点，而每个直线段则是该处为零或线性的各项的和。以下内容需始终牢记：铰链的系数并非斜率。它是对斜率的调整，即在该铰链的节点处，向从左侧传来的斜率所添加的量。从左至右阅读，变量图以第一段的单价开始，每个节点都通过其所在位置的系数对该单价进行调整。这就是完整的解读规则，下文的定理1和2便是其证明。该模型由截距加上每个系数乘以其对应的转折点组成，而任意区间的单价即为该和式的斜率。

以上述打印的术语为例；图2将每个术语与其和值一同绘制出来，并在下方标注了每个区间的单价；而图3则展示了这些单价如何解释可比实例与估价对象之间的调整关系。位于1,200、2,000和2,800处的节点形成了四个区间。在每个区间内，若其节点位于区间内或其左侧，则右铰链处于活动状态；若其节点位于区间内或其右侧，则反向铰链处于活动状态——右铰链在其节点之后的每个区间内起作用，反向铰链在其节点之前的每个区间内起作用。单价根据有效铰链的系数计算得出：将有效右铰链的系数相加，再减去有效反向铰链的系数。所得表格即为模型在每个区间的单价，其他特征均固定为一组值（程序使用估价对象的数据）；在没有交互作用的模型中，这一限定条件不会改变任何结果，而在下文的案例2中，它则会改变一切：

| 面积（平方英尺）      | 活动铰链                                         | 单价（\$/sf）                         |
|---------------|----------------------------------------------|-----------------------------------|
| 低于 1,200      | $h(1200 - \text{gla})$ 仅                     | $-(-600) = +\mathbf{600}$         |
| 1,200 至 2,000 | $h(\text{gla} - 1200)$                       | $\mathbf{1000}$                   |
| 2,000 至 2,800 | $h(\text{gla} - 1200), h(\text{gla} - 2000)$ | $1000 - 250 = \mathbf{750}$       |
| 超过 2,800      | 所有三个右侧铰链                                     | $1000 - 250 - 650 = \mathbf{100}$ |

第一行是常被忽略的步骤。反射铰链上的系数  $-600$  并非每平方英尺的单价  $-\$600$ 。该铰链

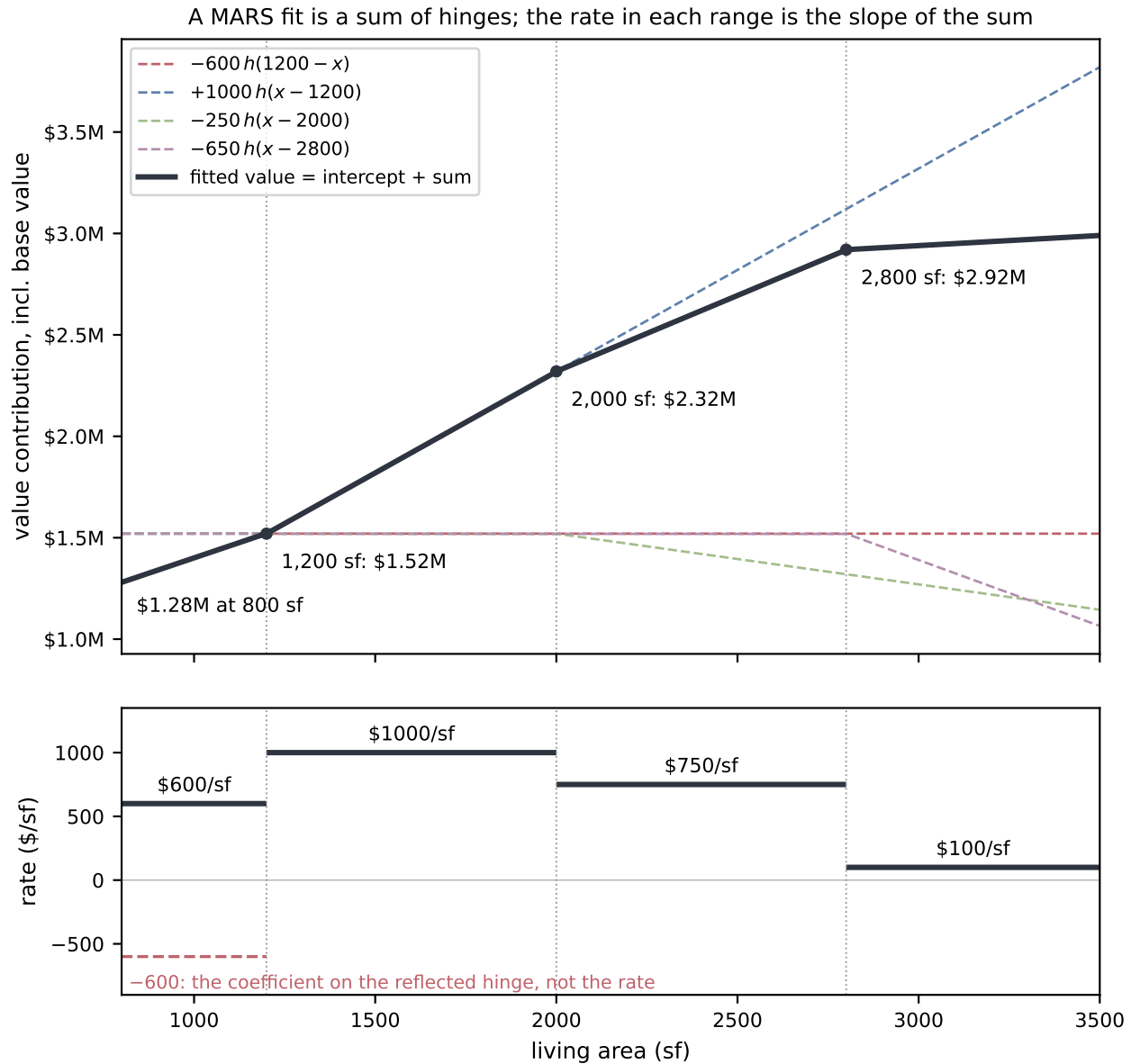
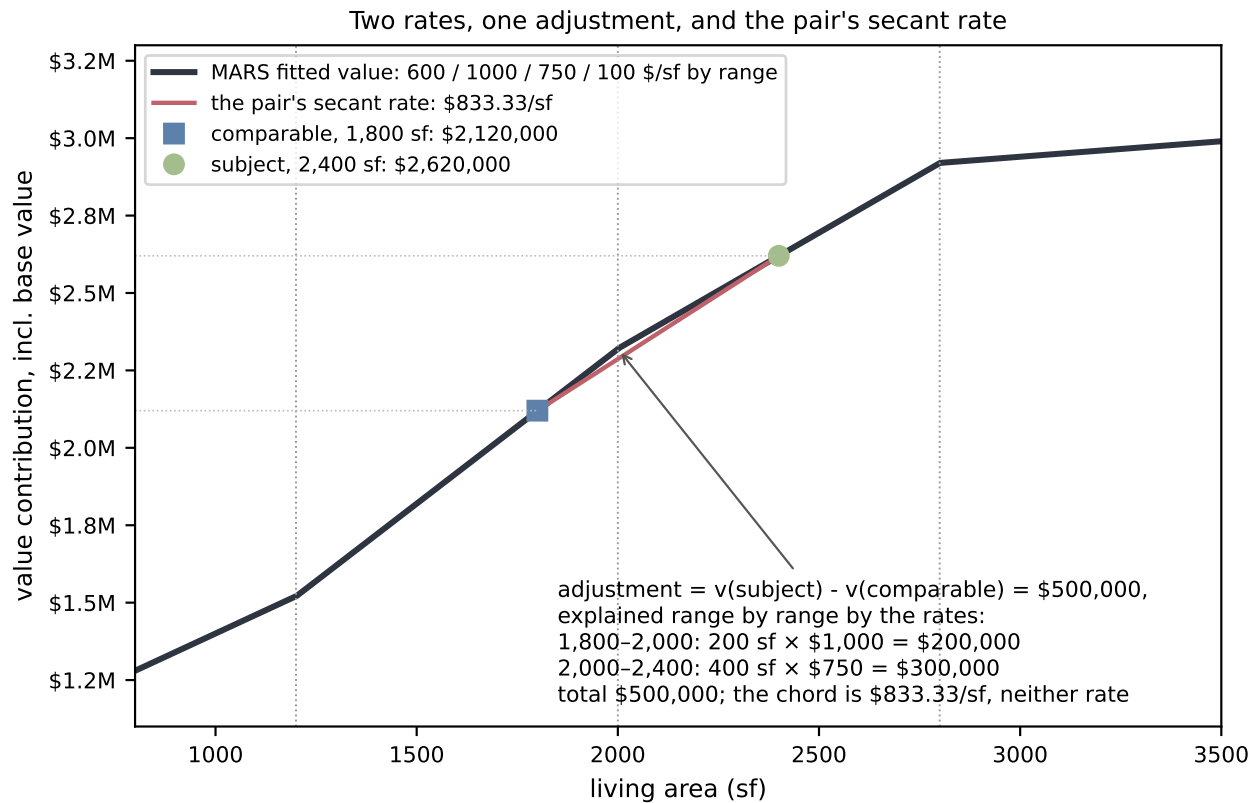


Figure 2: 该示例中的四个铰链项、它们的和以及每个区间内的单价。在反射铰链  $h(1200 - gla)$  上，系数  $-600$  被特别标出，以免读者将其误认为单价；1,200 平方英尺以下的单价为  $+600$ 。



```

Model (v = value contribution, gla = living area in sf):
v = 1,520,000 - 600·h(1200-gla) + 1000·h(gla-1200) - 250·h(gla-2000) - 650·h(gla-2800)
as earth prints it:
(Intercept) 1520000 h(1200-gla) -600 h(gla-1200) 1000 h(gla-2000) -250 h(gla-2800) -650
Adjustment from the comparable (1,800 sf) to the subject (2,400 sf) =  $v(2,400) - v(1,800) = \$500,000$ ;
explained range by range by the rates:
1800-2000 sf: 200 sf  $\times$  $1000/sf = $200,000
2000-2400 sf: 400 sf  $\times$  $750/sf = $300,000
total = $500,000 secant rate for the pair:  $500,000 / 600 = \$833.33/\text{sf}$ 

```

Figure 3: 以 1,800 平方英尺的可比实例和 2,400 平方英尺的估价对象为基准得出的拟合值。该调整值（即两项贡献值的差额）为 \$500,000，现行费率可逐区间解释这一数值；连接两点的弦（约为 \$833 每平方英尺）即为该对的割线费率，即一条直线仅适用于此对而无其他情况所需的单一费率；普通回归分析必须为每对数据使用一个费率。

$h(1200 - \text{gla})$  衡量房屋面积比 1,200 平方英尺短缺多少，而  $-600$  乘以该短缺量即为折扣：对于 800 平方英尺的房屋，折扣为 \$240,000，当面积达到 1,200 平方英尺时，折扣归零。每增加 1 平方英尺，折扣将减少 \$600，因此折扣率为  $+\$600$ 。（当系数为正时，同一铰链因尺寸较小而增加价值，其单价为负值。）规则概括如下：在某个范围内，单价等于所有活动右铰链系数之和 减去所有活动反向铰链系数之和，再加上线性项的系数（若模型中存在该特征，则以无节点的直线形式输入）。与此相关的一条约定是：在节点处，单价取自右侧，因此右铰链从其节点开始计数，而反向铰链仅严格在其节点下方计数；因此，在 1,200 平方英尺处的单价为 \$1,000，即从该处开始的区间单价，程序的读取方式也与此一致。

验证表格构建是否正确的依据是节点处的拟合值。在 1,200 平方英尺时，所有转折点均为零，该值即为截距，\$1,520,000；在 2,000 时，该值为  $\$1,520,000 + 1,000 \times 800 = \$2,320,000$ ；在 2,800 时， $\$2,320,000 + 750 \times 800 = \$2,920,000$ ；而在 800 平方英尺（数据中面积最小的房屋）时，该值为  $\$1,520,000 - 600 \times 400 = \$1,280,000$ 。从 800 到 1,200，该值上升 \$240,000，增速为 \$600，这对应第一行；若将系数误读为增长率，则该表的数值应从左向右递减直至 1,200 的节点，但实际数值显示并非如此。图2绘制了四个铰点、其和以及各区间的增长率，并在读者可能将其误认为增长率的位置标注了系数  $-600$ 。

该程序还处理了另外两个复杂情况，而手动表必须：

- **交互作用。** earth 在其前向迭代阶段（即逐项添加项的阶段；Friedman 1991, §3）中，当某个特征的率值取决于另一个特征时（即存在 交互作用），会输出类似  $h(\text{gla} - 1500) \times \text{lot}$  的结果。此时，“lot”的率值在居住面积大于或小于 1,500 平方英尺时会有所不同，且某个特征的率值表始终是基于其他特征（保持在估价对象的数值）给定的表格。程序会取一个点，为每个其他特征设定一个值，并计算该点处的每项率值。
- **水平值与调整值。** 截距和其他特征中的项共同确定了衡量贡献的基准水平；在每次调整中，它们会相互抵消。程序将贡献值仅作为该特征中的项来报告，因此两个贡献值之间的差异恰好等于调整量。

## 两种情况：不含与含交互作用的模型

上一节的规则可以表述为两个定理（证明见下文），它们为每个阅读 MARS 模型的读者迟早都会提出的一个问题给出了明确的答案：一个率实际上依赖于多少个已列出的项？答案可分为两种情况。

### 情况一：无交互作用

设定。设  $h(u) = \max(0, u)$ ，其中  $u$  为实数。一个在特征  $x, z_1, \dots, z_q$  上不包含交互项的 MARS 模型，其拟合值为

$$f(x, z_1, \dots, z_q) = \beta_0 + g(x) + \sum_{k=1}^q g_k(z_k),$$

其中  $\beta_0$  为截距项，每个  $g_k$  仅是  $z_k$  的函数，而  $g$  包含  $x$  中的所有项：

$$g(x) = c \cdot x + \sum_{j=1}^K a_j h(x - t_j) + \sum_{j=1}^K b_j h(t_j - x).$$

此处， $t_1 < t_2 < \dots < t_K$  是  $x$  中铰链的各个不同节点； $a_j$  是  $t_j$  处右铰链的系数， $b_j$  是  $t_j$  处反向铰链的系数，当模型中不存在此类项时，二者均为 0；而  $c$  是裸线性项  $c \cdot x$  的系数，该特征以无节点的形式输入，earth 仅在 linpreds 中列出的特征上生成此项，或当 Auto.linpreds 启用时（参见定理 1 后的注释）；若不存在此类项（如本补充材料中的所有模型），则该系数为  $c = 0$ ；设

$t_0 = -\infty$  且  $t_{K+1} = +\infty$ ，并将  $S_i = (t_i, t_{i+1})$ （其中  $i = 0, 1, \dots, K$ ）定义为  $x$  的线段； $t_i$  是  $S_i$  的左结点， $t_{i+1}$  是其右结点。在每个  $S_i$  上， $g$  的每个加数要么恒为零，要么是线性的，因此  $g$  在  $S_i$  上是线性的；该处的斜率（由于  $f$  的其他加数均不依赖于  $x$ ，该斜率在  $S_i$  上也即  $\partial f / \partial x$ ）即为  $S_i$  上的单价，记作  $r_i$ 。 $x$  的单价表即为列表  $r_0, r_1, \dots, r_K$ 。（若  $K = 0$ ，则仅有一个区间，即  $(-\infty, +\infty)$ ，且该表为单一单价  $r_0 = c$ 。）在结点本身处， $g$  没有导数：其左导数和右导数分别为  $r_{i-1}$  和  $r_i$ ，两者相差  $a_i + b_i$ （见下文定理 2），因此单价表在  $t_i$  处显示的值是一种约定（此处取自右侧），而非  $g'$  的值。

**定理 1（区间上的单价）。**采用本问题的记号，对于任意  $i \in \{0, 1, \dots, K\}$ ，

$$r_i = c + \sum_{j=1}^i a_j - \sum_{j=i+1}^K b_j,$$

其中空和定义为 0。特别地， $r_i$  最多取决于  $K$  个  $2K$  铰链系数（每个节点一个），以及  $c$ 。

**定理 1 的证明。**固定  $i$  和一点  $x \in S_i$ ，使得  $t_i < x < t_{i+1}$ 。考虑  $g$  中每个加数，在  $x$  的某个邻域内，该邻域足够小，以至于位于  $S_i$  内部。常数项  $c \cdot x$  的导数为  $c$ 。对于位于  $t_j$  的右铰点：若  $j \leq i$ ，则  $t_j \leq t_i < x$ ，因此该邻域内有  $h(x - t_j) = x - t_j$ ，其导数为 1；若  $j \geq i+1$ ，则  $x < t_{i+1} \leq t_j$ ，因此该处有  $h(x - t_j) = 0$ ，其导数为 0。对于位于  $t_j$  的反射铰点：若  $j \geq i+1$ ，则  $x < t_j$ ，因此有  $h(t_j - x) = t_j - x$ ，其导数为 -1；若  $j \leq i$ ，则  $t_j < x$ ，因此有  $h(t_j - x) = 0$ ，其导数为 0。在  $x$  处可导的函数的有限和，在该点处对导数的和而言也是可导的，由此得到

$$g'(x) = c + \sum_{j \leq i} a_j \cdot 1 + \sum_{j \geq i+1} a_j \cdot 0 + \sum_{j \leq i} b_j \cdot 0 + \sum_{j \geq i+1} b_j \cdot (-1),$$

即上述公式。关于计数：索引集  $\{j : j \leq i\}$  和  $\{j : j \geq i+1\}$  互不相交，且共同穷尽  $\{1, \dots, K\}$ ，因此每个节点  $t_j$  恰好贡献  $a_j$  或  $b_j$  中的一个，绝不会同时贡献两者；故至多有  $K$  个枢轴系数，且  $r_i$  在  $S_i$  的每个点上均相同。 ■

该界限已达到：如果对于每个  $j$ ， $b_j = 0$  成立，则最右侧的区间  $S_K$  将用尽  $a_j$  的所有  $K$ 。

**备注（当  $c$  不为零时）。**earth 可以将一个特征表示为一条无节点的一条单一直线（即设置中的  $c \cdot x$  项），且有两种不同的实现方式，而这种差异至关重要。linpreds，即包含诸如 linpreds = c("GLA") 等命名特征的列表，会强制列表中的每个特征以线性方式输入，即使使用带节点的拟合效果更好；这取决于分析人员的决策，但可能会牺牲拟合精度。Auto.linpreds，这是一个默认开启的单一开关，不会强制任何操作：它仅改变了 earth 对实际为纯线性拟合特征的显示方式——即仅有一个铰点且其节点位于最小观测值处——将其以系数和变量名称的形式打印，而非显示为铰点；拟合结果保持不变。无论哪种情况，earth 都会将该项以纯变量名及其系数的形式输出，在 earth 的摘要形式中显示为 221.4 \* GLA，如下例所示。定理 1 通过  $c$  来处理，该函数会为每个区间段增加单价。例如，调用

```
mod_linear <- earth(
  SalePrice ~ GLA + LotSize + BathrmCount + BedrmCount,
  data = sales,
  degree = 1,
  linpreds = c("GLA", "LotSize", "BathrmCount", "BedrmCount")
)
```

会以线性方式处理每个特征（通过 degree = 1，因此也不会拟合线性项的乘积），并在 earth 的摘要形式中（示例输出，非拟合模型）显示：

```

SalePrice =
179843
+ 221.4 * GLA
+ 11.8 * LotSize
+ 34872 * BathrmCount
+ 17641 * BedrmCount

```

对于居住面积，这是采用  $c = 221.4$  且无铰链的设置， $K = 0$ ：仅有一个区段，根据定理 1，整个数据范围内的单一单价为  $r_0 = c = \$221.40$  每平方英尺；地块面积、浴室和卧室的计算方式相同，分别为  $\$11.80$  每平方英尺地块面积、 $\$34,872$  每间浴室以及  $\$17,641$  每间卧室。就本补充说明而言，此类模型属于普通回归，即每个特征对应一个单价。在数据范围内，此类项与一条具有单一右铰链的直线相同，其节点位于观测到的最小值处。《Journal》采用 `Auto.linpreds = FALSE` 进行计算，因此在其模型中，若某个特征的变量图在数据范围内呈直线，则会表现为该单一铰链，例如 `h(gla-800) 700`，其节点位于数据中面积最小的房屋处，对应  $c = 0$ 、 $K = 1$  和  $a_1 = 700$ ：在节点下方，单价为 0，该区间内无销售数据；而在节点上方，单价为 700，因此数据上的单价表仅有一行。由此可得一个推论：节点处的单价变化即下文的定理 2。

**推论 1 (反射符号)。**一个系数为  $b_j$  的反射铰链，在  $t_j$  左侧的每个区间段上，对单价贡献  $-b_j$ ；在右侧则贡献 0。在示例中，位于  $t_1 = 1,200$  处的  $b_1 = -600$ ，对  $r_0$  贡献  $+600$ ，这正是本补充材料所围绕的整个陷阱。

**证明。**参见定理 1 中的第二个和。 ■

## 七个节点的例子，以及让读者止步的假设

计数之所以重要，是因为几乎所有人在使用打印版的 MARS 模型时都会抱有一种假设：即节点旁边打印的系数是该节点作为左节点的线段的斜率。但事实并非如此。铰链的系数是对来自左侧斜率的调整值，而非斜率本身；因此，线段的斜率等于第一个线段的斜率，加上其左侧节点以及更左侧每个节点处此类调整值的累计和。抱有这种错误假设的读者会在脑海中进行计算，或者使用小型程序或电子表格公式进行计算，发现计算结果无法复现拟合值，于是放弃，并得出 MARS 难以理解的结论。它并非难以理解，而是具有累积性。

**定理 2 (累积和)。**采用情况 1 的记号，对于任意  $i \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$r_i = r_{i-1} + a_i + b_i.$$

因此，对于任意  $i$ ,  $r_i = r_0 + \sum_{j=1}^i (a_j + b_j)$ ，其中  $r_0 = c - \sum_{j=1}^K b_j$  是左端区段的单价， $r_K = c + \sum_{j=1}^K a_j$  是右端区段的单价。

**定理 2 的证明。**固定  $i \in \{1, \dots, K\}$ 。根据定理 1，

$$r_i = c + \sum_{j=1}^i a_j - \sum_{j=i+1}^K b_j \quad \text{以及} \quad r_{i-1} = c + \sum_{j=1}^{i-1} a_j - \sum_{j=i}^K b_j.$$

两式相减， $c$  项相互抵消； $a$  项的两个和仅相差单项  $a_i$ ；且由于  $\sum_{j=i}^K b_j = b_i + \sum_{j=i+1}^K b_j$ ， $b$  项的两个和仅相差单项  $b_i$ ，该项在  $r_{i-1}$  中被减去，而在  $r_i$  中未被减去。因此  $r_i - r_{i-1} = a_i + b_i$ 。将此恒等式  $j = 1, \dots, i$  代入  $i$ ，左侧项可进行缩进： $(r_1 - r_0) + (r_2 - r_1) + \dots + (r_i - r_{i-1}) = r_i - r_0$ ，由此得到求和公式。 $r_0$  和  $r_K$  的值分别是  $i = 0$  处（该处  $a$  的和为空）和  $i = K$  处（该处  $b$  的和为空）的定理 1。 ■

**推论 2 (读取规则)。**在情况 1 的设定下，对于任意  $i \in \{1, \dots, K\}$ ，其左端节点为  $t_i$  的区段的单价为  $r_i = r_{i-1} + a_i + b_i$ ：印在节点上的系数将加到从左侧传来的单价上，而这些系数本身并非该

区段的单价。这两者恰好相等，即  $r_i = a_i + b_i$ ，当且仅当  $r_{i-1} = 0$ ；特别地，对于一个仅包含右铰链且不含线性项的模型，这种情况发生在  $i = 1$  处；根据定理 2，除非其前面的节点系数之和为零，否则不会在更晚的节点处发生。

证明。第一个等式即为定理 2。 $r_i = a_i + b_i$  当且仅当  $r_{i-1} = 0$  由此可得。若对于所有  $j$  和  $c = 0$ ， $b_j = 0$  成立，则根据定理 2 可得  $r_0 = 0$ ，因此  $r_1 = a_1$ ，且  $r_{i-1} = \sum_{j < i} a_j$ ，这仅当这些系数之和为零时才等于 0。■

**推论 3**（作为积分的调整）。在情况 1 的框架下， $g$  在每个节点处连续，因为每个铰链点都是连续的；因此，对于每个  $z$ ， $f(\cdot, z)$  也是连续的；正是这一点使得无论从左侧还是右侧到达节点，其值都相同，并使得单价能够从一个量过渡到另一个量。设  $x_c$  和  $x_s$  分别为可比实例和估价对象的  $x$  量，且两者的其他特征均保持相同值，因此  $g(x)$ ——即  $f$  中涉及  $x$  的项——即为  $x$  在量  $x$  处的贡献。设  $u_1 = \min(x_c, x_s)$ 、 $u_2 = \max(x_c, x_s)$  以及  $|I|$  分别表示区间  $I$  的长度。那么，调整量  $g(x_s) - g(x_c)$ （即使得可比实例的贡献与估价对象的贡献相等而添加的数值）为

$$g(x_s) - g(x_c) = \int_{x_c}^{x_s} g'(u) du = \text{sign}(x_s - x_c) \sum_{i=0}^K r_i \cdot |S_i \cap [u_1, u_2]|.$$

。通俗来说：调整量是两量之间单价的积分，且由于单价在每个区间段上都是恒定的，因此该积分即为沿途各区间段中单价与区段宽度的乘积之和。

证明。 $g$  是连续的，且为分段线性函数，其分段数有限，因此是绝对连续的；根据微积分基本定理，有  $g(x_s) - g(x_c) = \int_{x_c}^{x_s} g'(u) du$ ，其中导数在节点以外的各处均存在，而节点是一个有限集。在每个  $S_i$  上，根据定理 1，被积函数等于  $r_i$ ，因此  $\int_{u_1}^{u_2} g'(u) du$  是  $i$  上  $r_i$  乘以  $S_i \cap [u_1, u_2]$  长度的和，未相交的线段贡献长度 0；且  $\int_{x_c}^{x_s} = \text{sign}(x_s - x_c) \int_{u_1}^{u_2}$  根据积分的方向，。■

率表为  $g'$ ；调整量直接计算为  $g(x_s) - g(x_c)$ ，等于该表在两个量之间的积分；而定理 1 和 2 说明了  $g'$  的构成。实际上，调整量总是通过贡献之差来计算，这完全不需要用到率；该推论说明了为何按范围逐一读取的率能够再现该结果，这正是率之所以能成为对调整量的解释和验证，而非其计算方法的原因。

以某数据集中的居住面积为例，该数据集中最小的房屋面积为 800 平方英尺，包含 7 个节点，面积分别为 1,200、1,600、2,000、2,400、2,800、3,200 和 3,600 平方英尺，模型中有 9 个项，其中 2 个是反射铰链，每个铰链都与同一节点上的右铰链配对：分别位于 1,200 和 2,400 处：

|             |      |
|-------------|------|
| h(1200-gla) | -500 |
| h(gla-1200) | 700  |
| h(gla-1600) | -100 |
| h(gla-2000) | 150  |
| h(2400-gla) | -200 |
| h(gla-2400) | -250 |
| h(gla-2800) | -300 |
| h(gla-3200) | -150 |
| h(gla-3600) | 50   |

七个节点构成八个区段。每个区段的单价等于活动右铰链系数之和减去活动反射铰链系数之和：

| 段 (sf)        | 有效条款                                   | 单价 (\$/sf)                    |
|---------------|----------------------------------------|-------------------------------|
| 800 至 1,200   | $h(1200 - gla), h(2400 - gla)$         | $500 + 200 = 700$             |
| 1,200 至 1,600 | $h(gla - 1200), h(2400 - gla)$         | $700 + 200 = 900$             |
| 1,600 至 2,000 | 右侧铰链位于 1,200、1,600 处; $h(2400 - gla)$  | $700 - 100 + 200 = 800$       |
| 2,000 至 2,400 | 右铰链在 1,200 至 2,000 之间; $h(2400 - gla)$ | $700 - 100 + 150 + 200 = 950$ |
| 2,400 至 2,800 | 右铰链在 1,200 至 2,400 之间                  | $700 - 100 + 150 - 250 = 500$ |
| 2,800 至 3,200 | 右铰链在 1,200 至 2,800 之间                  | $500 - 300 = 200$             |
| 3,200 至 3,600 | 右侧铰链在 1,200 至 3,200 处                  | $200 - 150 = 50$              |
| 超过 3,600      | 所有七个右侧铰链                               | $50 + 50 = 100$               |

需要从表中读取的三项内容。最右侧线段的单价  $700 - 100 + 150 - 250 - 300 - 150 + 50 = 100$  综合了所有七个右铰链的系数（每个节点对应一个），这正是定理 1 中  $K = 7$  的上限；其中两个反射铰链在此不起作用，因为反射铰链在其自身节点的右侧是平的，而最右侧线段位于每个节点的右侧。最左侧的线段，从 800 延伸至其右侧节点 1,200，则是镜像：只有反射铰链才被计入，且其符号相反，因为每个节点都位于其右侧节点处或其右侧。在每个携带一对节点的节点处，步长是两个系数之和：在 1,200 处， $-500 + 700 = +200$ ，从 700 到 900；在 2,400 处，单价从 950 降至 500，变化量为  $-450$ ，这恰好是该节点处两个系数的和，即  $-250$  和  $-200$ ：穿过该节点会使右铰链开启而镜像铰链关闭，且这两项变化都朝同一方向作用。

最右侧区段的相同单价也可以通过“步行”法得到：从第一个区段的 700 开始，经过 800 到 1,200，并在经过每个节点时，加上该节点处系数的和： $+200$ 、 $-100$ 、 $+150$ 、 $-450$ 、 $-300$ 、 $-150$ 、 $+50$ 。该路径遍历了全部八个分段和全部九个项，最终结果也是 100。直和（direct sum）更简短，这也是程序所执行的操作；而“遍历”则是读者应手动操作一次，以验证节点旁边的系数代表的是“步”而非“层”。位于 2,400 处的  $-450$  包含两个半步：穿过该节点后，会留下反射铰链  $h(2400 - gla)$ ，以及它添加在节点下方的  $+\$200$ ；同时引入右铰链  $h(gla - 2400)$ ，其  $-250$  由此开始。 $-200 - 250 = -450$ ，单价从  $\$950$  降至  $\$500$ 。

图 4 针对一个五结模型得出了相同的结论，该模型足够小，可以肉眼验证。条形图表示印在节点处的系数；阶梯表示各区段的单价；阶梯从第一个区段的单价  $\$900$  开始（由反射铰链设定），每一步都是该节点处条形图的总和。最右侧段的单价  $650 - 250 + 150 - 200 - 150 = 200$  利用了全部五个右铰链；位于 1,200 处的反射铰链（标注为  $-900$ ）将第一段单价设为  $+900$ ，且不与其他任何部分产生交互作用。

关于该图表的形状，有两点值得一提，因为它们涉及的是房屋，而非 MARS。首先，坐标轴的起始点是 800 平方英尺而非零，且图表从坐标轴开始绘制：本附录中所有拟合模型的图表——就像建模软件绘制的图表一样——都从数据中面积最小的房屋延伸至面积最大的房屋，超出该范围的部分则不作显示。每个市场区域都有最小房屋面积，低于该面积则无成交记录，因此变量图中该值以下区域未显示任何数据：并非零值，而是数据中不存在该面积对应的成交记录；虽然公式在此处仍会返回一个数值，但该数值属于外推结果。图中采用 800 平方英尺的下限，但该下限是市场区域的特征，而非常数：不同市场区域在 MLS 中显示的房产最小面积各不相同，其具体数值由数据集决定，而非估价师。其次，曲线形状因市场而异：在沿海地区的例子中，增长最陡峭的区间是 1,200 至 2,000 平方英尺，而在图 4 中，这是第一个区间。在阿瑟顿（Atherton）或希尔斯伯勒（Hillsborough）等高价区域，居住面积（GLA）曲线的陡峭区间可能位于 4,000 或 5,000 平方英尺以上，那里正是买家集中的区域。此外，如果某个社区的开发商曾在某个时期集中建造了同一种户型的房屋且存在问题，那么在中等面积范围内，评估率可能会出现急剧下降，正如图中 1,600 至 2,000 平方英尺区间所示。在更广阔的市场区域内，各类曲线形态各异，而费率表正是估价师解读特定曲线信息的方式。图 5 和图 6 绘制了其中两种曲线形态（如印刷品所示），以便读者能够根据规则构建相应的费率表，并将其与阶梯曲线进行核对。

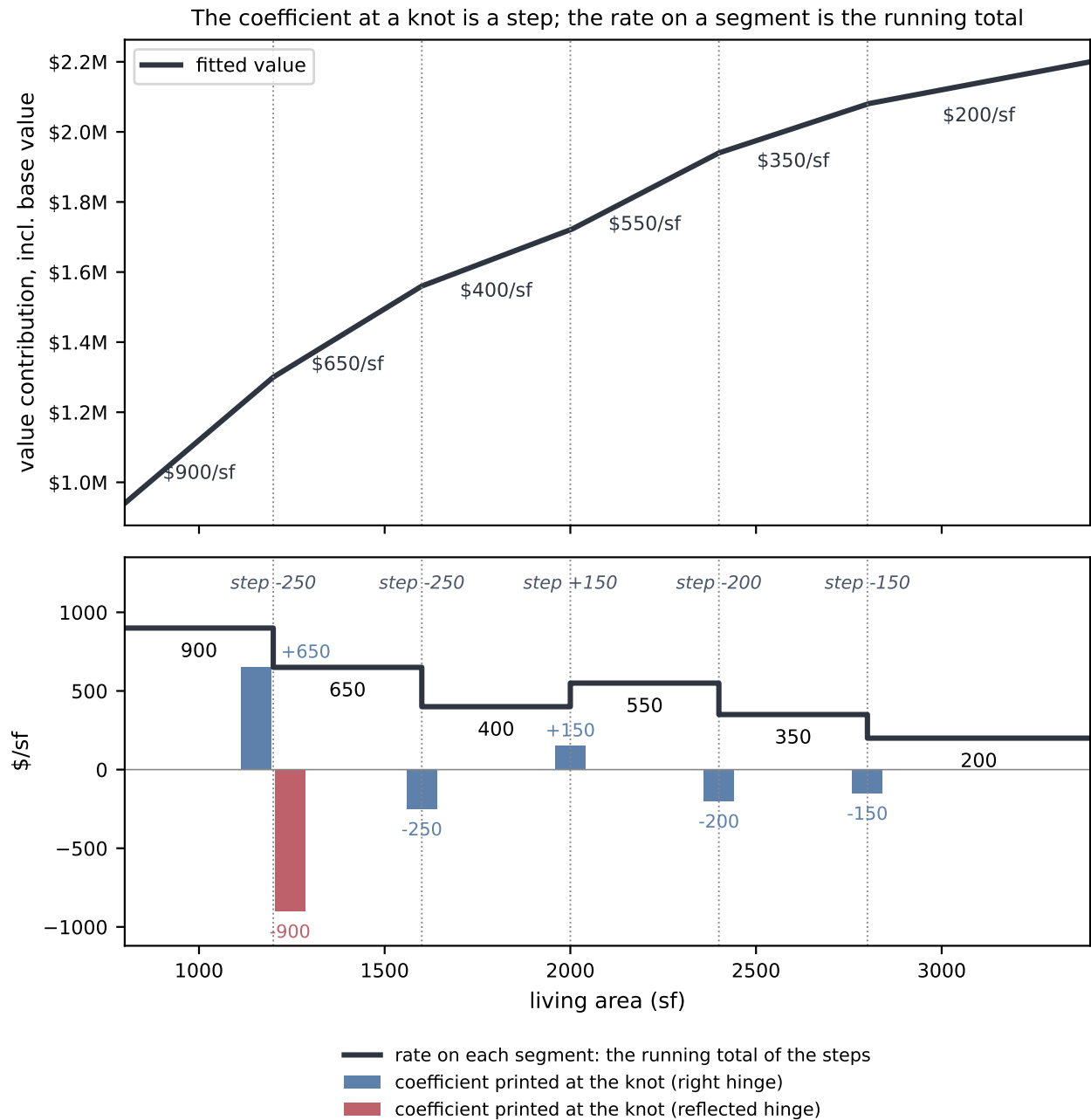


Figure 4: 基于起始面积为 800 平方英尺的数据构建的五节点模型： $-900 h(1200 - gla) + 650 h(gla - 1200) - 250 h(gla - 1600) + 150 h(gla - 2000) - 200 h(gla - 2400) - 150 h(gla - 2800)$ 。上图显示了拟合值，每个区段上标注了单价；800 平方英尺以下的区域没有数据，因为不存在此类房屋。下图中，每个节点处的系数以条形图显示，各区段的增长率以阶梯图显示：阶梯的每一步即为该节点处条形图的总和（此处为一条，若节点包含一对数据则为两条，定理 2），因此一段的单价等于第一段的单价加上其左侧各阶的累加总和，而非其旁边的系数：每个系数都用于调整从左侧传入的单价。

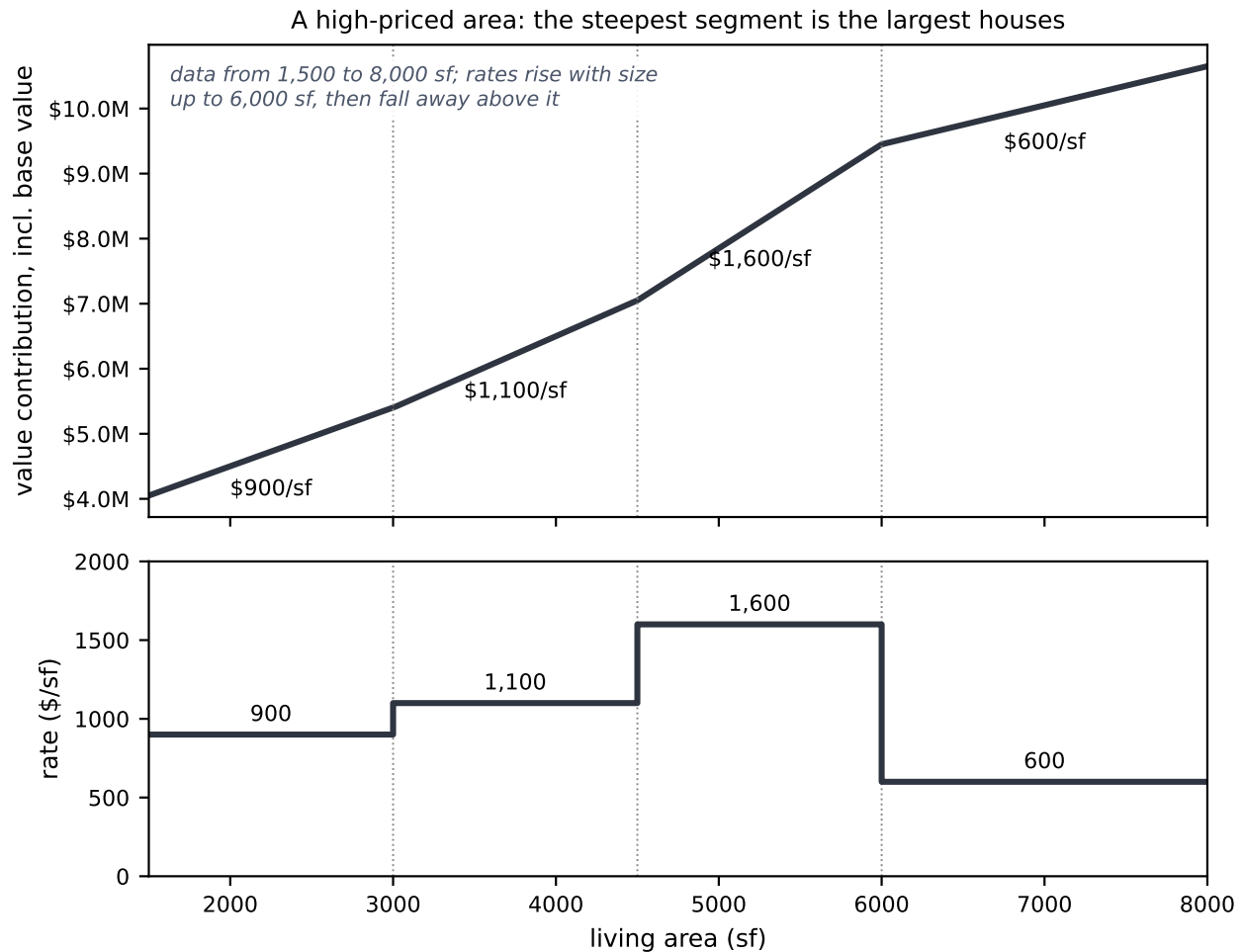


Figure 5: 根据面积在 1,500 至 8,000 平方英尺之间的数据，该区域房价较高： $-900h(3000 - gla) + 1100h(gla - 3000) + 500h(gla - 4500) - 1000h(gla - 6000)$ ，在第一个节点处与 \$5,400,000 相交。每平方英尺价格走势：\$900、\$1,100、\$1,600 及 \$600。涨幅最陡的区间是 4,500 至 6,000 平方英尺，该区间买家集中；首个区间涨幅较缓；超过 6,000 平方英尺后，涨幅开始回落。规律未变，唯有市场在变。

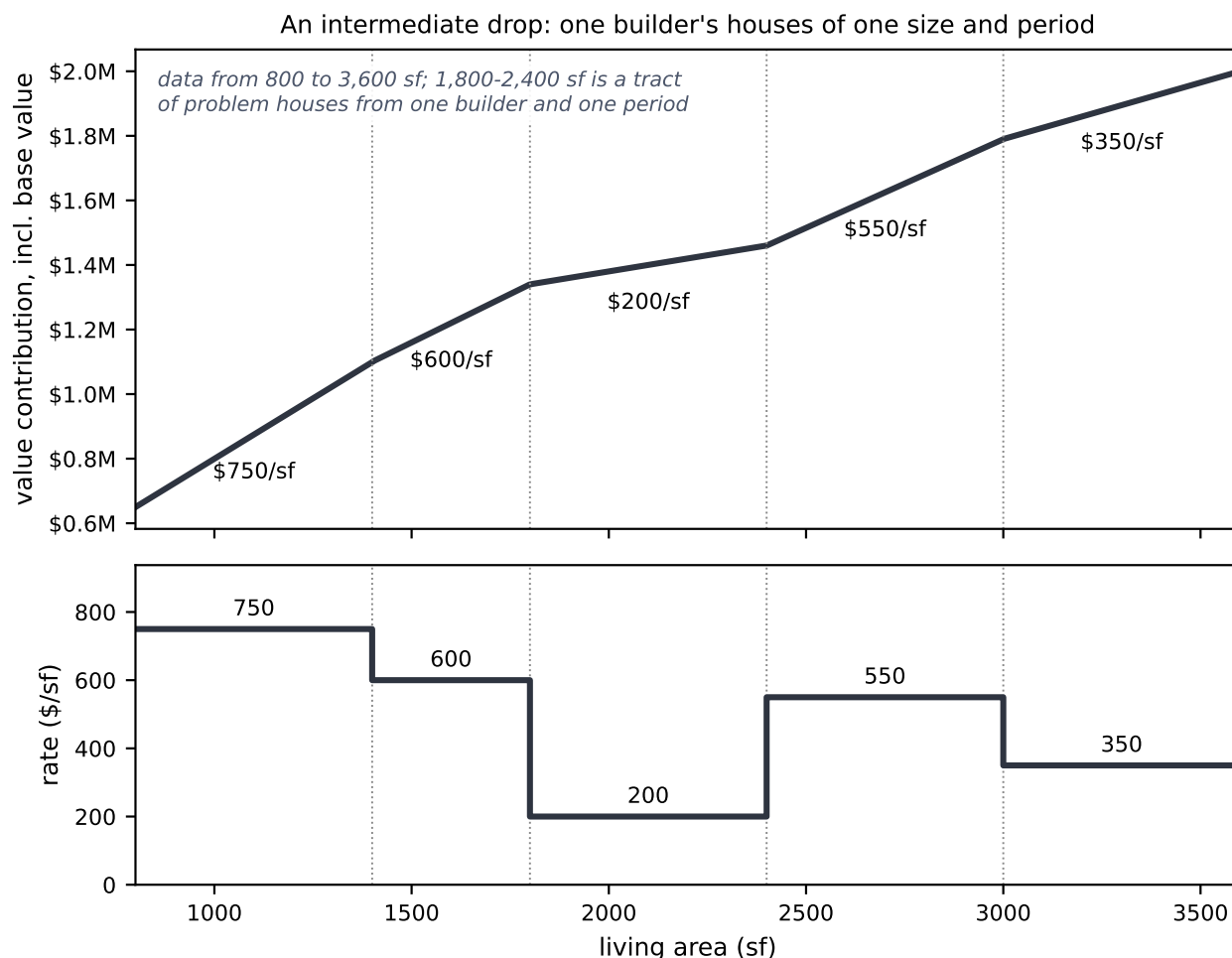


Figure 6: 根据 800 至 3,600 平方英尺的数据，出现一次中间下降： $-750 h(1400 - gla) + 600 h(gla - 1400) - 400 h(gla - 1800) + 350 h(gla - 2400) - 200 h(gla - 3000)$ ，在第一个节点处与 \$1,100,000 相交。每平方英尺的比价分别为：\$750、\$600、\$200、\$550 和 \$350。假设 1,800 至 2,400 这一区间是一片由同一开发商在同一时期建造的、面积相近的住宅区，且存在市场价格问题（这是一个假设的示例）；该区间的比价在此处降至 \$200，并在该区间之上回升。如果读者将  $-400$  的系数在 1,800 处视为该区段的单价，或者假设单价仅随规模减小而下降，就会对该地块产生误解。

## 情况二：有交互作用

交互项是指系数与不同变量中各因子的乘积之积，其中每个因子要么是铰点，要么就是该变量本身，例如： $\gamma \cdot h(\text{gla} - 1500) \cdot \text{lot}$ 。案例 1 中的所有内容均得以保留，仅有一个词发生了变化：区间内的单价现在是其他变量的函数，而不是常数。以下是该命题及其证明，随后将探讨其对估价师计算方法的影响。

设置。一个包含特征交互项的 MARS 模型  $x, z_1, \dots, z_q$  拟合得到以下结果：

$$f(x, z) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \gamma_m \prod_{k \in F_m} B_{m,k}(z_k),$$

其中  $M$  表示除截距项以外的项数， $\beta_0$  表示截距项，该模型由截距项及其各项之和组成，项  $m$  的表达式为  $\gamma_m \prod_{k \in F_m} B_{m,k}(z_k)$ ：即其系数  $\gamma_m$  乘以该项中每个特征的一个因子。这里， $z = (z_1, \dots, z_q)$ ；为了使一个索引遍历所有特征， $z_0$  表示  $x$ 。出现在项  $m$  中的特征构成集合  $F_m \subseteq \{0, 1, \dots, q\}$ ，一个项中不会出现相同的特征，且每个因子  $B_{m,k}$  都是特征  $z_k$  的函数，分为三种类型：特征本身  $z_k$ ；右铰链  $h(z_k - t)$ ；或反射铰链  $h(t - z_k)$ 。设  $M_x = \{m : 0 \in F_m\}$  为包含  $x$  的项。对于  $m \in M_x$ ， $B_{m,0}(x)$  是该项在  $x$  中的因子，而该项的其他特征——即那些  $z_k$  且满足  $k \in F_m, k \neq 0$  的特征——则是该项中  $x$  的配对因子。写成

$$P_m(z) = \prod_{k \in F_m, k \neq 0} B_{m,k}(z_k)$$

表示伴侣因子的乘积，空乘积为 1。通俗地说：一旦填入估价对象的其他特征，一个术语的伴侣因子相乘后将得到一个普通数值；该数值乘以打印出的系数即为普通居住面积术语的系数，且该术语的读法与案例 1 相同。配数积  $P_m(z)$  是项  $m$  在将其在  $x$  中的因式提取出来后所剩下的部分：项  $m$  即为  $\gamma_m B_{m,0}(x) P_m(z)$ 。在给定点  $z$  处，它是一个数值，因此在一条线段上，该项对  $x$  的作用如同一个具有系数  $\gamma_m P_m(z)$  的单铰链，而该乘积即为配数进入单价的方式。没有配数的项具有  $P_m(z) = 1$ ，属于案例 1 中的项。

例如，在下文例题中的项  $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$  中，设居住面积为  $x$ ，则  $x$  中的因子为  $h(\text{gla} - 1200)$ ，其中“一方”指地块，且  $P_m(z) = h(\text{lot} - 6000)$ 。对于 5,000 平方英尺的地块  $P_m(z) = 0$ ，该项对费率没有影响；对于 10,000 平方英尺的地块  $P_m(z) = 4,000$ ，该项在 1,200 处作为转折点，系数为  $0.03 \times 4,000 = 120$ ，使超过 1,200 平方英尺的部分费率增加 \$ 每平方英尺 120。此处并未限制一个项可包含多少特征；earth 的 degree 参数设定了该上限，且下文的定理对任意阶数均成立。一个包含  $d$  个特征的项，其图的维度为  $d + 1$ ，当  $d$  超过 2 时，该图便无法绘制；该软件仅显示切片，每次仅显示一两个特征，其余特征保持固定，而定理 3 即是在估价对象自身所在点处进行的相同切片操作。 $P_m(z)$  便是该切片操作发生之处：无论一项有多少个因子，在某个点上，它们的乘积始终是一个数。在四特征项  $\gamma h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000) h(\text{age} - 10) \text{baths}$  中，当  $\gamma = 0.001$  时，其图形具有五维， $P_m(z) = h(\text{lot} - 6000) h(\text{age} - 10) \text{baths}$ ；对于 10,000 平方英尺的地块、20 年的房龄和 3 间浴室，结果为  $4,000 \times 10 \times 3 = 120,000$ ，且沿居住面积方向，整个项在 1,200 处形成铰链，系数为  $\gamma \times 120,000 = 0.001 \times 120,000 = 120$ ，每平方英尺增加 \$120：这与上述两项特征的条件相同，但系数却小了三十倍。这就是为什么当其组成部分以较大单位衡量时，高阶项的系数往往显示为非常小的数值：它乘以了多个组成部分值的乘积。而且，如果任何一个参与项处于其节点的零侧——例如面积远低于 6,000 平方英尺或房龄低于 10 年——那么  $P_m(z) = 0$ ，无论其他参与项如何，该项都不会产生任何贡献；次数越高，在给定房产下该项被“关闭”的可能性就越多。本补充资料中的示例采用了双向交互（degree = 2）。

设  $t_1 < \dots < t_K$  为  $B_{m,0}$  中属于铰链的各条不同节点，其中  $t_0 = -\infty$ 、 $t_{K+1} = +\infty$  以及线段

$S_i = (t_i, t_{i+1})$  与情况 1 中的定义相同。对于  $m \in M_x$  和  $i \in \{0, \dots, K\}$ , 定义

$$s_{m,i} = \begin{cases} +1 & \text{若 } B_{m,0} \text{ 为特征 } x \text{ 本身, 或为满足 } t_j \leq t_i \text{ 的右铰链 } h(x - t_j), \\ -1 & \text{若 } B_{m,0} \text{ 为满足 } t_j \geq t_{i+1} \text{ 的反射铰链 } h(t_j - x), \\ 0 & \text{其他情况。} \end{cases}$$

一个点  $z$  是其他特征的值。由于每个  $B_{m,0}$  在  $S_i$  上都是线性的或恒等于零, 因此  $f$  在  $S_i$  上对  $x$  是线性的 (对于固定的  $z$ ); 其在该处的斜率即为  $S_i$  在点  $z$  处的速率, 记为  $r_i(z) = \partial f / \partial x$ , 其中  $x \in S_i$ 。

要一次性查看所有符号, 请参考下面示例中的模型 (按 Earth 的输出格式): 截距 900,000,  $600 h(\text{gla} - 1200)$ ,  $-350 h(\text{gla} - 2400)$ ,  $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$  以及  $15 \text{lot}$ 。其特征包括居住面积  $x = z_0 = \text{gla}$  和地块面积  $z_1 = \text{lot}$ , 因此  $q = 1$ ; 截距为  $\beta_0 = 900,000$ , 共有  $M = 4$  项。以一处居住面积为 2,000 平方英尺、地块面积为 10,000 平方英尺的房产为例:

| $m$ | $\gamma_m$ | $F_m$  | $B_{m,0}(x)$           | $B_{m,1}(z_1)$         | $P_m(z)$               | 该物业处的项值                                 |
|-----|------------|--------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------------------|
| 1   | 600        | {0}    | $h(\text{gla} - 1200)$ | 无                      | 1                      | $600 \times 800 = 480,000$              |
| 2   | -350       | {0}    | $h(\text{gla} - 2400)$ | 无                      | 1                      | $-350 \times 0 = 0$                     |
| 3   | 0.03       | {0, 1} | $h(\text{gla} - 1200)$ | $h(\text{lot} - 6000)$ | $h(\text{lot} - 6000)$ | $0.03 \times 800 \times 4,000 = 96,000$ |
| 4   | 15         | {1}    | 无                      | lot                    | (不在 $M_x$ 中)           | $15 \times 10,000 = 150,000$            |

因此,  $M_x = \{1, 2, 3\}$ : 第 4 项在  $x$  中没有因子, 无论居住面积大小都增加相同数值, 且不进入  $x$  的单价。拟合值为  $f = 900,000 + 480,000 + 0 + 96,000 + 150,000 = \$1,626,000$ 。第 1 项和第 2 项没有配对项, 因此  $P_1(z) = P_2(z) = 1$ ; 第 3 项有一个配对项, 且  $P_3(z) = h(10,000 - 6,000) = 4,000$ , 即上例中的乘数。由此得出的定理 3 将这些转化为单价。居住面积具有节点  $t_1 = 1,200$  和  $t_2 = 2,400$ , 该属性位于两者之间的线段  $S_1$  上, 其中项 1 和项 3 有效, 而项 2 无效 ( $s_{1,1} = s_{3,1} = 1$ ,  $s_{2,1} = 0$ ); 因此  $r_1(z) = 600 \times 1 + 0.03 \times 4,000 = 720$ , 即例题表格中 10,000 平方英尺地块的单价。

**定理 3** (含交互作用的区间单价)。采用上述记号, 对于任意  $i$  及任意点  $z$ ,

$$r_i(z) = \sum_{m \in M_x} \gamma_m s_{m,i} P_m(z).$$

**定理 3 的证明。** 固定  $i$ , 取点  $z$ , 并设  $x \in S_i$ 。含有  $m \notin M_x$  的项在  $x$  中不含任何因子, 且在  $x$  中为常数; 其在  $x$  中的导数为 0。含有  $m \in M_x$  的项等于  $\gamma_m B_{m,0}(x) P_m(z)$ , 其中  $P_m(z)$  不依赖于  $x$ 。根据定理 1 证明中的情况分析, 将其应用于单因子  $B_{m,0}$ , 则  $B_{m,0}$  在  $x$  处的导数对于特征本身为 1; 对于右铰链, 根据其节点位于  $t_i$  处或其左侧, 或位于  $t_{i+1}$  处或其右侧, 其导数分别为 1 或 0; 对于反射铰链, 根据其节点位于  $t_{i+1}$  处或其右侧, 或位于  $t_i$  处或其左侧, 其导数分别为 -1 或 0; 也就是说, 它等于  $s_{m,i}$ 。因此, 该项的导数为  $\gamma_m s_{m,i} P_m(z)$ , 而  $f$  (一个有限级数) 的导数即为上述两者的和。该值不取决于选择了哪个  $x \in S_i$ 。 ■

定理 1 是这样一种特例:  $M_x$  中的所有项均无配对项, 因此  $P_m(z) = 1$ ; 将和式中的各项按其节点进行分组, 即可得到该处证明的公式。三个推论说明了配对项如何变化; 其中最后一个推论表明“每个节点一个”的界限不成立, 而下文中的示例则展示了“项可能为零”的情况。

**推论 4** (单价仅在某一点处是数值)。在情况 2 的设定下, 对于每个  $i$ , 单价  $r_i$  是点  $z$  的函数。当所有满足  $s_{m,i} \neq 0$  的项  $m \in M_x$  均无配对项时, 该单价在  $z$  内保持恒定。当某个具有  $s_{m,i} \neq 0$  的项有配对项时,  $r_i(z)$  即为函数  $z \mapsto \sum_m \gamma_m s_{m,i} P_m(z)$ , 该函数随配对项的值而变化, 除非这些项完全抵消; 因此, 在同一线段上具有相同  $x$  的两个属性, 只要其配对项的乘积不同且差异未被抵消, 其  $x$  的单价便不同。这就是程序为何需要一个点, 以及为何不存在仅针对单一特征的独立单价表的原因。

证明。根据定理 3,  $r_i(z) = \sum_{m \in M_x} \gamma_m s_{m,i} P_m(z)$ 。若每个满足  $s_{m,i} \neq 0$  的项均无配对项, 则每个这样的  $P_m$  都是空积 1, 且该和为常数。否则, 该和至少包含一个和项  $\gamma_m s_{m,i} P_m(z)$ , 其中  $\gamma_m s_{m,i} \neq 0$  且  $P_m$  是至少一个因子的积, 而每个因子都是其配对项的一个非常数函数, 因此该和在  $z$  中仅当这些和项完全抵消时才是常数。■

**推论 5** (在  $x$  的某一段上, 单价在每个伙伴中都是一个变量图)。在案例 2 的设定下, 固定  $i$ 、一个伙伴  $z_p$  ( $p \geq 1$ ) 以及所有其他特征的值。此时,  $z_p \mapsto r_i(z)$  是  $z_p$  的连续分段线性函数, 其分段点位于  $M_x$  中各项的因子  $B_{m,p}$  的节点之间。在  $x$  上, 当每个伙伴均被固定时, 单价仅在  $x$  的节点  $t_1, \dots, t_K$  处发生变化; 而在  $x$  及其伙伴的联合空间中, 单价曲面既被  $x$  的节点所截断, 也被每个伙伴的节点所截断。

证明。在其他特征固定的情况下, 每个  $P_m(z)$  都是一个常数乘以 1 (若  $p \notin F_m$ ) 或单因子  $B_{m,p}(z_p)$ , 后者即为  $z_p$  本身、 $h(z_p - t)$  或  $h(t - z_p)$ : 这是  $z_p$  的连续分段线性函数, 且至多有一个断点, 位于其节点处。此类函数的有限线性组合——即定理 3 对于  $r_i(z)$  所给出的结果——是连续的且为分段线性函数, 其断点仅出现在某些加数发生断点的位置。 $x$  中的陈述即为定理 3 本身: 对于固定的  $z$ ,  $r_i(z)$  在每个  $S_i$  上均为一个数, 且各线段仅在  $x$  的节点处相交。■

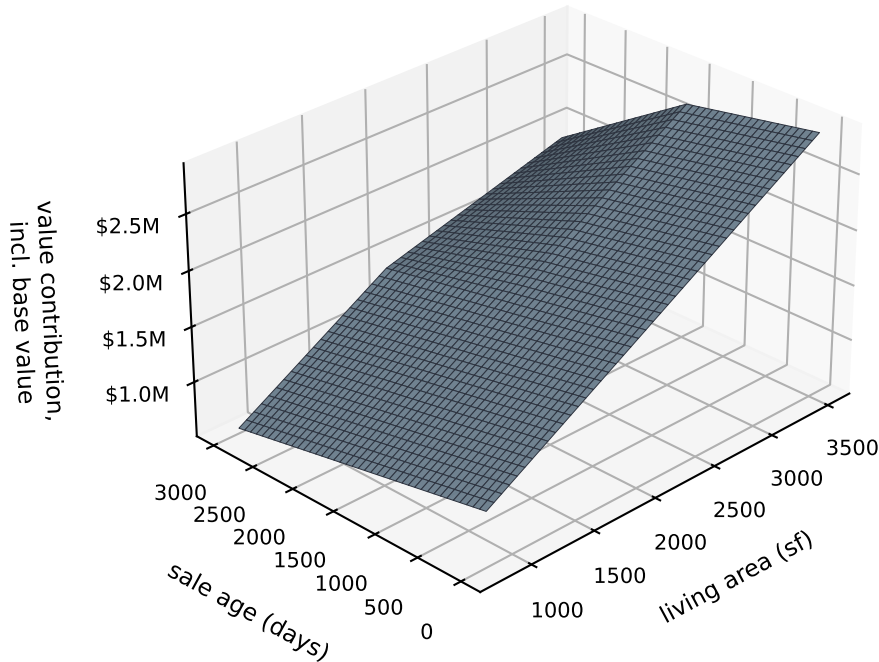
**推论 6** (定理 1 的上界不成立)。在情况 2 的设定下, 定理 3 中  $r_i(z)$  公式中含有非零加数的项的数量, 仅受  $|M_x|$  (即包含  $x$  的项的数量) 的限制, 且可能超过  $K$ : 一个  $x$  的节点可能出现在多个  $M_x$  项中, 且每个节点的配对项各不相同, 且均为不同的项。反之, 当包含  $s_{m,i} \neq 0$  的项与其配对项的乘积为零时, 该项在该点处不作任何贡献。

证明。项  $\gamma_1 h(x - 1500) \text{lot}$  和  $\gamma_2 h(x - 1500) h(\text{age} - 10)$  是  $M_x$  中具有相同节点的不同项, 且在 1,500 上方的线段上, 两者的  $s_{m,i} = 1$  均相同, 因此两者均作出贡献; 而  $r_i(z) = \gamma_1 \text{lot} + \gamma_2 h(\text{age} - 10)$  包含来自同一节点的两个加数; 继续添加伙伴将导致在同一节点上无限增加新的项。对于逆命题, 取一个其配对项为铰链  $h(\text{lot} - 6000)$  的项, 在满足  $\text{lot} < 6000$  的点处: 此时  $P_m(z) = 0$ , 且该加数为零, 尽管  $s_{m,i} \neq 0$ ; 而在满足  $\text{lot} > 6000$  的点处则不为零。■

这里应补充编辑本人在评估过程中得出的一个实际观察结果。一旦允许交互项, 软件为该变量单独绘制的居住面积曲线往往呈直线状, 即单一单价; 而若无交互项, 本应出现在居住面积曲线中的弯曲部分, 反而会出现在交互项中, 通常表现为居住面积与销售年龄 (即销售日期与生效日期之间的时间间隔) 的交互项, 或是居住面积与卫生间数量的交互项。定理 3 解释了为何直线并非增长率。earthUI 中的“按变量绘制”图会单独绘制各项; 而 plotmo 的“一阶图”则会绘制整个模型的切片, 其中其他变量均设为中位数。在其他地方, 交互项被绘制为曲面 (例如 plotmo 的一阶和二阶图, Milborrow 2024b, earthUI 将其并排展示)。对于任何实际房产, 居住面积的费率等于直线的斜率, 再加上每个活跃交互项的系数乘以其配对因子的值; 该单价在这些交互项的居住面积节点处发生变化, 具体变化幅度取决于配对因子: 六年前的一笔交易与上个月的一笔交易, 或者两卫住宅与四卫住宅, 尽管居住面积图中显示为一条直线, 但它们实际对应着不同的居住面积费率表。若读者将该直线视为固定单价, 便又遇到了更高一层的障碍; 而估价对象点的单价表正是突破这一障碍的途径。图7以软件处理的方式绘制了一个此类模型——作为居住面积与成交年限的曲面图, 并据此读取了两个不同成交年限下的居住面积变量曲线。

图 8 从图 2 所示的市场出发, 沿相反方向展开了相同的思路。针对该市场构建了一个包含居住面积与销售年限交互作用的模型, 其中居住面积的主效应表现为一条直线, \$500 每平方英尺, 而四个交互项则形成了曲线。软件根据居住面积自动绘制的图表就是那条直线。以四年房龄的房产为例, 居住面积的单价分别为2所示的每美元对应值: \$600、\$1,000、\$750 和 \$100; 若以新房为例, 则呈直线趋势; 若以两年房龄的房产为例, 则介于两者之间。该模型的构建旨在阐明观点, 而非拟合销售数据, 真正的重新拟合也不会像2中那样完美契合; 但其机制正是真实重新拟合所采用的, 这也是为何估价师在添加交互项后, 看到居住面积图线变直时, 并未丢失那些弯曲部分。这些弯曲已转移至交互项中, 只有在特定点位进行读取才能恢复它们。包含交互项的模型的主效应图仅绘制该变量的项, 这代表的是在所有交互项均为零的合作伙伴设置下的切片 (此处为新成交), 而非市场的整体形态; 请阅读估价对象处的变量图。

Living area by sale age: the surface the software draws



The living-area variable graph, read at two points

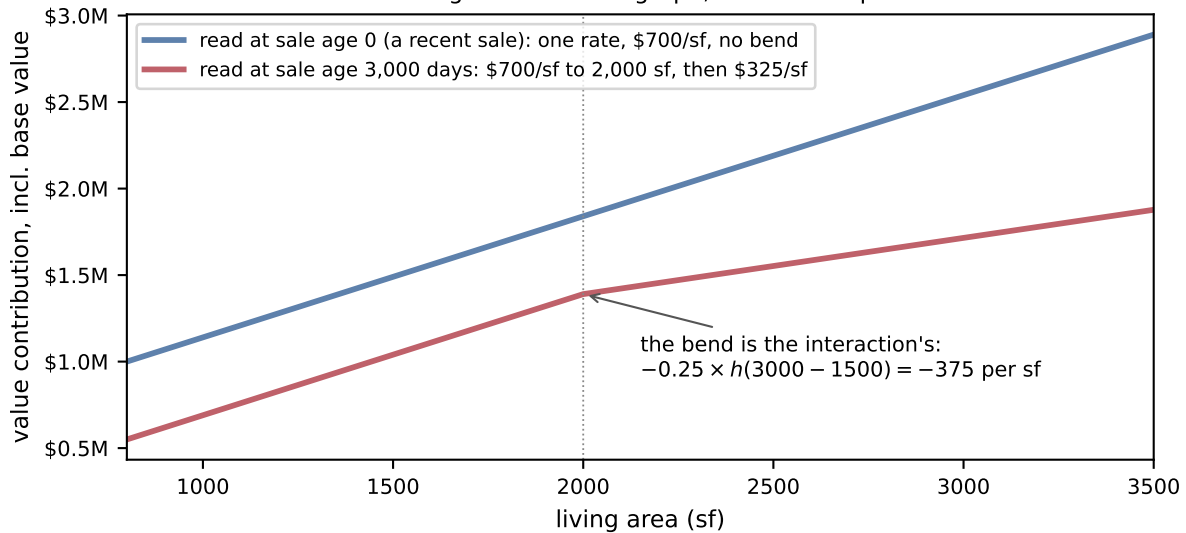


Figure 7: 居住面积与销售天数之间的交互作用:  $1,000,000 + 700h(\text{gla} - 800) - 150\text{saleage} - 0.25h(\text{gla} - 2000)h(\text{saleage} - 1500)$ ，基于 800 至 3,500 平方英尺的面积数据以及销售天数不超过 3,000 天的数据。上图是建模软件为该变量对绘制的曲面。下图展示了根据定理 3 的要求，在两个数据点处测得的居住面积变量图：对于任何销售天数不超过 1,500 天的房产，伴侣因子  $h(\text{saleage} - 1500)$  为零，交互作用不产生影响，且曲线为每平方英尺 \$700 的直线；在发生于 3,000 天前的交易中，伴侣因子为 1,500，当面积超过 2,000 平方英尺时，交互作用会减去  $0.25 \times 1,500 = 375$  每平方英尺，此时的单价为 \$325。居住面积的主效应（仅包含居住面积项，无交互项）在两种情况下均为同一条直线；曲线部分源于交互作用，且仅在居住面积与伙伴项同时起作用时出现。

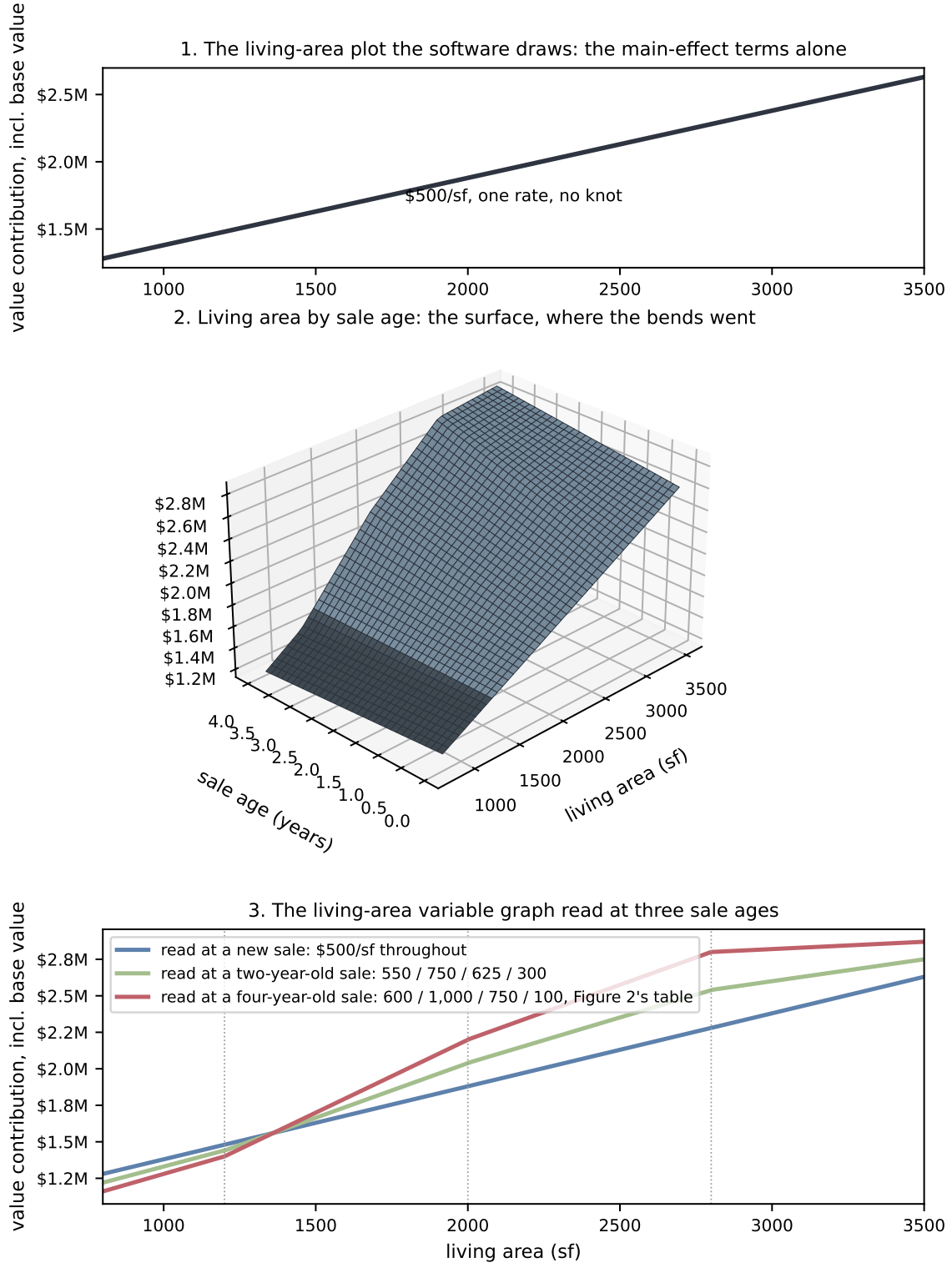


Figure 8: 图 2 所示的市场，其中居住面积与销售年限存在交互作用： $1,280,000 + 500 h(\text{gla} - 800) - 20,000 \text{saleyrs} + [-25 h(1200 - \text{gla}) + 125 h(\text{gla} - 1200) - 62.5 h(\text{gla} - 2000) - 162.5 h(\text{gla} - 2800)] \times \text{saleyrs}$ ，销售年限（单位：年）范围为 0 至 4。各子图的说明见其标题；在 4 年时，底部图表的单价与图 2、\$120,000 所示的数值完全一致，但数值水平较低。该图仅用于演示，未进行拟合。

最后一个结果涉及的是调整而非汇率，而正是这一结果最终体现在销售网格上。

**定理 4 (调整的分拆取决于顺序)。**在第 2 类 (Case 2) 的设置下，设  $y = z_p$  ( $p \geq 1$ ) 为其他特征之一，设  $w$  代表其余特征， $z_k$  代表  $k \notin \{0, p\}$ ；将  $f(x, y, w)$  表示为  $f$ ，其参数按此方式分组。设一个可比实例位于  $(x_c, y_c, w)$ ，一个估价对象位于  $(x_s, y_s, w)$ ，两者的  $w$  均为相同。对于  $y$  的值  $y^*$ ，将  $x$  的调整定义为：当  $y$  保持在  $y^*$  时，其值为

$$\Delta_x(y^*) = f(x_s, y^*, w) - f(x_c, y^*, w).$$

设  $M_{x,y}$  为同时包含  $x$  和  $y$  的项。每个此类项均为其系数乘以三部分： $\gamma_m A_m(x) C_m(y) Q_m(w)$ ；其中， $A_m(x) = B_{m,0}(x)$  是该项在  $x$  中的因子，本身即为  $x$ ，或作为  $x$  中的铰链； $C_m(y) = B_{m,p}(y)$  是该项在  $y$  中的因子，本身即为  $y$ ，或作为  $y$  中的铰链；而  $Q_m(w)$  则是该项在其余特征中的因子的乘积，每个此类特征本身即为该项，或作为该项中的铰链，当该项没有其他因子时，即为 1。在下面的示例中，该项为  $0.03 h(\text{gla} - 1200) h(\text{lot} - 6000)$ ，其中  $A_m(x) = h(\text{gla} - 1200)$ 、 $C_m(y) = h(\text{lot} - 6000)$  以及  $Q_m(w) = 1$ 。对于  $x$  的调整，当  $y$  在标房处取值  $y_s$ 、在可比房处取值  $y_c$  时，写出  $\Delta_x(y_s)$  和  $\Delta_x(y_c)$ ；即在  $y^* = y_s$  处为  $\Delta_x(y^*)$ ，在  $y^* = y_c$  处为；在例题中，当  $x$  为居住面积、 $y$  为地块面积时， $\Delta_x(y_c) = \$240,000$  对应可比房 5,000 平方英尺的地块， $\Delta_x(y_s) = \$288,000$  对应标房 10,000 平方英尺的地块；然后

$$\Delta_x(y_s) - \Delta_x(y_c) = \sum_{m \in M_{x,y}} \gamma_m [A_m(x_s) - A_m(x_c)] [C_m(y_s) - C_m(y_c)] Q_m(w),$$

而总差值  $f(x_s, y_s, w) - f(x_c, y_c, w)$  不涉及对  $y^*$  的选择。该命题涉及这一包含两个特征的切片，其中一个特征  $y$  与其他所有特征在两个性质上均保持相同  $w$ ；当这两个切片之间有三个或更多特征不同时，总和在它们之间的分配方式与沿更长的单特征移动链的情况相同，且该定理适用于链中的每一步，此时尚未移动的特征保持在其当前值。特别地，当仅存在一个此类项  $\gamma A(x) C(y)$  且  $w$  中不存在因子时，针对  $x$  的两个调整值之差为  $\gamma [A(x_s) - A(x_c)] [C(y_s) - C(y_c)]$ ；当  $x$  中的移动改变了  $A$  且两个性质在  $C$  上存在差异时，该差值并非 0。对于  $A = h(x - t)$  和  $C = y$ ，该差值为  $\gamma [h(x_s - t) - h(x_c - t)] (y_s - y_c)$ ；对于  $A = h(x - t)$  和  $C = h(y - s)$ （即下文例题所示形式），该差值为  $\gamma [h(x_s - t) - h(x_c - t)] [h(y_s - s) - h(y_c - s)]$ 。

**定理 4 的证明。**将  $f$  中的各项按其包含的  $x$ 、 $y$  进行分组。既不包含  $x$  也不包含  $y$  的项在  $(x_s, y^*, w)$  和  $(x_c, y^*, w)$  处取相同值，并在  $\Delta_x(y^*)$  处相互抵消。包含  $y$  但不包含  $x$  的项同样相互抵消。包含  $x$  但不包含  $y$  的项对  $\Delta_x(y^*)$  的贡献量不依赖于  $y^*$ ，因此它在  $\Delta_x(y_s) - \Delta_x(y_c)$  处相互抵消。项  $m \in M_{x,y}$  对  $\Delta_x(y^*)$  的贡献为  $\gamma_m [A_m(x_s) - A_m(x_c)] C_m(y^*) Q_m(w)$ ；设  $y^* = y_s$  和  $y^* = y_c$ ，并进行减法运算，即可得到所述和。总差值是同一个函数  $f$  的两个值的差，且未涉及  $y^*$ 。 ■

因此，交互作用的数值属于这两个特征的组合，而非其中任何一个。一种网格模型每次仅调整一个特征，并将其值设为可比实例的数值；另一种则将该特征值设为估价对象的数值。这两种模型在总值上达成一致，但在具体分配上存在分歧。将其他特征值固定为估价对象的数值是一种可辩护的惯例，也是该程序采用的惯例；报告必须说明采用了哪种惯例。标准的住宅评估表格（如《统一住宅评估报告》(URAR)）中没有交互项的行。若逐项调整，这两种操作必须使对应特征处于相反位置——先将居住面积调整至估价对象的地块面积，再将地块面积调整至可比实例的居住面积，或反之——这样交互项仅计入一次，各行数值之和即为模型的总差异。若直接计算各特征的贡献值，网格表也可将交互项作为独立行呈现——即估价对象与可比实例之间交互项的差值，位于各特征行旁边；此时每行即为一组项，无需选择特定顺序。在下面的示例中，三行分别是居住面积 \$240,000、地块面积 \$75,000，以及按地块计算的居住面积 \$120,000，其总和为 \$435,000。在存在交互作用的情况下，该对的割线率会随着该对的变化而发生两种变化：一种是通过交叉的范围，另一种则是通过该对在各位伙伴中的位置。

含交互作用的算例

又是一个沿海市场，现在包含两个特征——居住面积和地块面积，以及二者之间的一种交互关系。  
earth prints:

|                         |        |
|-------------------------|--------|
| (Intercept)             | 900000 |
| h(gla-1200)             | 600    |
| h(gla-2400)             | -350   |
| h(gla-1200)*h(lot-6000) | 0.03   |
| lot                     | 15     |

如定理 3 所述。居住面积有两个节点，即 1,200 和 2,400，且在  $M_{gla}$  中包含三个项：两个普通铰链和一个交互项，其配对项为  $h(lot - 6000)$ 。在从 1,200 到 2,400 的区间内，位于 1,200 处的普通铰链处于活动状态，位于 1,200 处的交互作用铰链也是如此，因此该区间的单价为  $600 + 0.03 h(lot - 6000)$ ：地块面积内的单价呈变换曲线，面积在 6,000 平方英尺及以下时单价固定为 600，超过该面积后每增加 1 平方英尺，单价增加 3 美分。超过 2,400 时，2,400 处的铰链开始生效，单价为  $250 + 0.03 h(lot - 6000)$ 。地块本身的单价为：地块面积超过 6,000 平方英尺时为  $15 + 0.03 h(gla - 1200)$ ，低于该面积时为 15，因此每个特征的单价取决于另一个特征的数量。

两组数据，两张表格。该程序根据数据生成的居住面积单价表，范围为 800 至 3,500 平方英尺，分别对应 5,000 平方英尺和 10,000 平方英尺的地块。每列代表该模型在居住面积上的斜率，此时地块面积仅固定为该值，不考虑其他情况：

| 居住面积（平方英尺）    | 第 5,000 号地块的单价（\$/平方英尺） | 第 10,000 号地块的单价（\$/平方英尺） |
|---------------|-------------------------|--------------------------|
| 800 至 1,200   | 0                       | 0                        |
| 1,200 至 2,400 | 600                     | 720                      |
| 2,400 至 3,500 | 250                     | 370                      |

在较小地块上，伙伴因子  $h(5000 - 6000)$  为零，因此交互作用不产生任何影响，所得表格与不包含该交互作用的模型所给出的结果一致；这就是推论 6 中“项可消失”的情况。在较大的地块上，伙伴因子为 4,000，交互作用使每个大于 1,200 的区间增加了  $0.03 \times 4,000 = 120$ ，且同一个节点 (1,200) 同时为两个活跃项供能，这正是“每个节点仅有一个项”这一限制未能成立的表现。

现在进行调整。可比实例房产面积为 1,800 平方英尺，占地 5,000 平方英尺，估算值为 \$1,335,000；估价对象房产面积为 2,200 平方英尺，占地 10,000 平方英尺，估算值为 \$1,770,000。需要解释的总金额为 \$435,000。首先根据可比实例的地块面积调整居住面积，然后根据估价对象的居住面积调整地块面积。每次调整均为其所比较的两项贡献值之间的差额；当调整范围仅限于一个区间内时，该差额即为宽度乘以费率，这正是表格中的表述方式：

|        | 先看居住面积，再看地块                | 先看地块，再看居住面积                |
|--------|----------------------------|----------------------------|
| 居住面积调整 | $400 \times 600 = 240,000$ | $400 \times 720 = 288,000$ |
| 地块调整   | 195,000                    | 147,000                    |
| 总计     | 435,000                    | 435,000                    |

地块调整同样是缴费额的差异，相关费率对此作了解释；该地块的费率在 6,000 平方英尺处发生变化：在估价对象 2,200 平方英尺时，地块费率为 \$15（低于节点）和 \$45（高于节点），因此从 5,000 到 10,000 的费率变化为  $1,000 \times 15 + 4,000 \times 45 = 195,000$ ，而非  $5,000 \times 45$ ；在可比实例的 1,800 平方英尺面积下，该数值为  $1,000 \times 15 + 4,000 \times 33 = 147,000$ 。总和一致，正如定理 4 所言，而各部分的差异为 \$48,000，这恰好是该定理的公式： $0.03 \times [h(2200 - 1200) - h(1800 - 1200)] \times$

$[h(10000 - 6000) - h(5000 - 6000)] = 0.03 \times 400 \times 4,000$ 。该 \$48,000 值代表额外 400 平方英尺房屋面积与额外 4,000 平方英尺地块面积的综合价值；该值不属于任何单一特征，且无论哪一方在调整中被列为第二项，都将获得该值。根据该程序的惯例（即其他特征值保持不变），右侧一列显示了居住面积的数据：\$288,000，每平方英尺为 \$720，其报告中还注明了读数时的具体数值：

```
Feature: gla
Rates by range (data from 800 to 3500; nothing is reported outside it):
  800 .. 1200   rate 0.0
 1200 .. 2400   rate 720.0
 2400 .. 3500   rate 370.0
Fitted value at the knots (intercept and partners included):
 1200   1050000.0
 2400   1914000.0
Comparable at 1800: contribution 432000.0
Subject at 2200:    contribution 720000.0
Adjustment, range by range:
 1800 .. 2200   400 at 720.0 = 288000.0
Adjustment added to the comparable: 288000.0
Secant rate for the pair (one straight-line rate): 720.0
Check: segments sum to the adjustment.
```

这两项贡献值均基于估价对象 10,000 平方英尺的地块面积计算得出；而在其自身 5,000 平方英尺的地块上，可比实例的居住面积贡献值为 \$360,000。

一位评测人员在可比实例的测试场地重新运行该程序，得到的结果是 \$240,000，这并没有错；评测人员和程序是在同一车身的两个不同点上进行测量的，报告必须说明具体是哪个点。

简而言之：如果没有交互项，MARS 模型就是按特征划分的单价表，而关于单价的任何论点，只要适用于普通回归，就可逐个细分段地套用。有了交互项后，单价就形成了一个曲面，定理 3 精确地说明了它如何弯曲，而估价师必须指明是在哪个点上读取的。

## 程序

`mars_rates.pl`（全文见附录）会读取“earth”生成的表格，或以 Prolog 项形式编写的模型，并生成单价表、各节点处的数值、两个分量及其差值，调整值（附带各区间范围的说明）、该对的割线税率，并验证各区间之和是否等于调整值。给定数据范围（即销售数据中面积最小和最大的房屋），该程序不会报告超出该范围的税率：铰链的代数运算在一侧趋于无穷大，而销售数据并非如此，超出销售范围的税率属于外推。以 800 至 3,500 平方英尺的数据为例：

```
Feature: gla
Rates by range (data from 800 to 3500; nothing is reported outside it):
  800 .. 1200   rate 600
 1200 .. 2000   rate 1000
 2000 .. 2800   rate 750
 2800 .. 3500   rate 100
Fitted value at the knots (intercept and partners included):
 1200   1520000
 2000   2320000
 2800   2920000
Comparable at 1800: contribution 600000
```

```
Subject at 2400:      contribution 1100000
Adjustment, range by range:
  1800 .. 2000      200 at 1000 = 200000
  2000 .. 2400      400 at 750 = 300000
Adjustment added to the comparable: 500000
Secant rate for the pair (one straight-line rate): 833.3333333333334
Check: segments sum to the adjustment.
```

该区块中包含两类数值。这些数值仅包含居住面积项，排除了截距项及其他所有特征项：\$600,000 和 \$1,100,000 之间的差异恰好就是调整量。节点处的数值是拟合值，其中包含截距，而在包含交互作用的模型中，还包含该点处伴侣项的值；在此，1,200 平方英尺处的 \$1,520,000 即为截距，因为该处所有枢轴项均为零。在可比实例和研究对象处的拟合值，即 \$2,120,000 和 \$2,620,000，同样包含截距项。报告将节点值标记为拟合值，以免读者将其误认为贡献项。

那一部分内容才应该放在报告的附录中：单价、节点数，以及两者之间的计算过程，且应以评审员能够手动重现的形式呈现。该程序的 69 项测试验证了符号规则、交互规则、调整后各段的一致性，以及对 earth 输出结果的解析器，并在《Journal》的 Prolog 环境 Trealla、SWI-Prolog 和 Scyer Prolog 下均通过了测试。对于使用 R 语言的读者，无需离开 R 环境即可阅读相同内容：随程序发布的 mars\_rates.R 文件可接收 earth 对象或其打印出的表格，并输出相同的代码块，其中单价值会被限制在数据范围内；Prolog 程序仍是经过验证的参考版本，而 R 文件会根据本增刊中的示例进行自我校验。该程序、其测试用例以及图表脚本随本期期刊发布，作为 PDF 文件旁的下载资源，遵循 GNU Affero 通用公共许可证（第 3 版或更高版本）发布。

## 为什么选 MARS，以及本文留给其他条目的问题

本刊采用 MARS 模型有三个原因，而正是这些原因使得本增刊得以问世。客观性：节点的位置由销售数据决定，遵循一个明确的流程和一条明确的修剪规则（即在后期阶段移除那些不值得保留的项），除上述明确设置（交互的最大度、惩罚、节点间距下限）之外，变量图的形状没有任何预先确定的内容。可发现性：前向遍历会搜索每个特征和每个候选节点（包括指定度数范围内的交互项），并报告其发现结果——这是任何从预设形状出发的方法都无法做到的。可解释性：数据所选范围内的恒定单价，以及基于相同枢轴构建的交互项，使得模型能够以单价表的形式呈现，且调整值可解释为单价乘以宽度。另外两种方法也会产生在特征范围内变化的单价，且它们彼此不同。第一种是分段（“断棒”）回归，它以一个变量和分析师选定的若干分段点为基础，估计各分段点的具体位置，并为每个分段点提供标准误差（衡量估计值在其他销售额情况下可能偏移的程度）；分段点之间的单价保持恒定，这与 MARS 模型类似。第二种是形状受限的加性模型，它拟合光滑曲线而非直线段，并被强制符合分析师设定的形状——例如，随着居住面积的增加，该值永远不会下降，或者每增加一平方英尺所增加的数值都小于前一次。本文中均未采用这两种方法。这两种方法各自回答了本补充材料未提出的问题，且每种方法都牺牲了上述三项特性中至少一项：分段回归牺牲了可发现性，因为变量和分段点数量是预先选定的；形状受限模型则牺牲了可解释性，因为曲线没有可制表的恒定增长率；同时也牺牲了客观性，因为其形状是人为强加的。本补充资料解读了 MARS 生成的模型；方法的选择，以及 MARS 从一组销售数据到下一组销售数据中找到的节点和增长率的稳定性，则是另行撰文探讨的估价对象。

## 本文未解决的问题

这些率值来自模型，以下四条统计学定理对其同样适用：一个率值对条件期望的逼近程度，仅限于模型形式所允许的范围（条件期望）；它可能包含被遗漏特征的值（遗漏变量偏差）；当某个特征随结构误差共同变化时，该率可能会被扭曲（内生性）；当两个特征总是同步变化时，无论销售数据

有多少，该率都可能完全无法通过销售数据确定（参数识别）。MARS 仅在销售额中包含能体现该变化的对比项时，才能发现费率发生变化的位置；一个“节点”是对市场的断言，其可靠性完全取决于其两侧的销售数据。本补充内容所增添的则更为具体：在给定模型的前提下，这里阐述了如何解读模型所传达的信息。

### References.

- Craytor, W. B. (2026). earthUI: An Interactive Interface for the earth (MARS) Package. *Valuation Engineer Journal*, 1(1). <https://doi.org/10.67330/7fj41b65>
- Friedman, J. H. (1991). Multivariate Adaptive Regression Splines. *The Annals of Statistics*, 19(1), 1–67. <https://doi.org/10.1214/aos/1176347963>
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (2nd ed.), §9.4, Multivariate Adaptive Regression Splines. Springer.
- Milborrow, S. (2024a). earth: Multivariate Adaptive Regression Splines. R package. <https://CRAN.R-project.org/package=earth>
- Milborrow, S. (2024b). plotmo: Plot a Model's Residuals, Response, and Partial Dependence Plots. R package. <https://CRAN.R-project.org/package=plotmo>
- Milborrow, S. (n.d.). Notes on the earth Package. <http://www.milbo.org/doc/earth-notes.pdf>

---

*Cross-references:* conditional expectation; omitted variable bias; endogeneity; parameter identification; hedonic regression; implicit price.

---

## Addendum: Prolog Formalization

The following machine-readable companion (`mars_rates.pl`) formalizes this entry in the journal's Prolog knowledge base. It is also published as a browsable galley alongside this article.

```
% SPDX-License-Identifier: AGPL-3.0-or-later
% Copyright (C) 2026 William Bert Craytor. Published by The Valuation Engineer
% Journal (Pacific Vista Net). This program is free software: you can
% redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU Affero General
% Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3
% of the License, or (at your option) any later version. It is distributed
% WITHOUT ANY WARRANTY, without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
% FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE; see the COPYING file beside it or
% <https://www.gnu.org/licenses/agpl-3.0.html>.

/* mars_rates.pl -- mars-rates: from a fitted MARS model to the rates, value
   contributions and adjustments an appraiser reports.

A MARS model, as the R package earth prints it, is an intercept plus a sum
of terms, each a coefficient times a product of basis functions:

    h(x - t)    a hinge, zero for x below the knot t, rising with slope +1 above
    h(t - x)    a reflected hinge, zero above t, rising to the LEFT: slope -1 in x
    x           a linear term
    h(x-t)*h(y-s) an interaction, the product of two factors

The appraiser does not report basis functions. The appraiser reports, for a
feature, the RATE the market pays per unit in each range (the slope), the
VALUE CONTRIBUTION of the quantity a property has (the level), and the
ADJUSTMENT: the amount added to a comparable's contribution to make it
equal to the subject's. This program turns the one into the other, and
checks that they agree.
```

The sign rule that hand-built tables get wrong: in a range, the rate is the sum of the coefficients of the active right hinges MINUS the sum of the coefficients of the active reflected hinges (plus any linear term's coefficient). A negative coefficient on  $h(5 - x)$  contributes a POSITIVE slope below 5.

Representation. A model is

```
model(Intercept, Terms)
```

where each term is `term(Coef, Factors)` and each factor is

```
hinge(Var, Knot)      h(Var - Knot)
```

```
rhinge(Var, Knot)     h(Knot - Var)
```

```
linear(Var)           Var
```

A point is a list of `Var = Value` pairs, e.g. `[gla = 1800, lot = 6000]`.

Entry points:

|                                                                     |                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>value(+Model, +Point, -Y)</code>                              | the fitted value at a point                                                                                                                                                                 |
| <code>contribution(+Model, +Var, +Point, -C)</code>                 | the part of the value that the terms involving Var contribute                                                                                                                               |
| <code>rate(+Model, +Var, +Point, -R)</code>                         | slope in Var at the point (other variables held at the point)                                                                                                                               |
| <code>knots(+Model, +Var, -Knots)</code>                            | the sorted knots on Var                                                                                                                                                                     |
| <code>rate_table(+Model, +Var, +Point, -Rows)</code>                | rows <code>range(Lo, Hi, Rate)</code> , Lo/Hi numbers or the atoms <code>minus_inf</code> , <code>plus_inf</code> ; other variables fixed at the point                                      |
| <code>rate_table(+Model, +Var, +Point, +data(Lo, Hi), -Rows)</code> | the same table clamped to the data range: the first row starts at Lo, the last ends at Hi, rows outside the data are dropped. Rates outside the data are extrapolation and are not reported |
| <code>knot_values(+Model, +Var, +Point, -Pairs)</code>              | Knot-Value at each knot                                                                                                                                                                     |
| <code>adjustment(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -A)</code>   | amount added to the comparable's contribution (Var = CompQ) to equal the subject's (Var = SubjQ)                                                                                            |
| <code>segments(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -Segs)</code>  | the adjustment as the appraiser explains it: <code>seg(Lo, Hi, Rate, Width, Amount)</code> per range crossed                                                                                |
| <code>pair_rate(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ, -R)</code>    | the pair's secant rate: the one rate a straight line                                                                                                                                        |
| $\hookrightarrow$ would                                             | need between the two quantities: adjustment over width                                                                                                                                      |
| <code>consistent(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ)</code>       | the segments sum to the adjustment                                                                                                                                                          |
| <code>parse_earth(+Atom, -Model)</code>                             | read earth's printed coefficient table (see <code>parse_earth</code> below)                                                                                                                 |
| <code>print_report(+Model, +Var, +Point, +CompQ, +SubjQ)</code>     |                                                                                                                                                                                             |

Plain ISO Prolog: runs under Trealla, SWI-Prolog and Scryer Prolog. No modules, no `format/2`, no double-quoted strings. Consult this file, then `tests/harness.pl` and `tests/test_mars_rates.pl`, and call `run_tests`. \*/

```

/* ===== */
/* 1. Evaluation */
/* ===== */

point_value(Var, Point, X) :- mr_member(Var = X, Point), !.
point_value(Var, _, _) :- throw(error(missing_variable(Var), point_value/3)).

factor_value(hinge(Var, T), Point, V) :- point_value(Var, Point, X), D is X - T, V is max(0, D).
factor_value(rhinge(Var, T), Point, V) :- point_value(Var, Point, X), D is T - X, V is max(0, D).
factor_value(linear(Var), Point, V) :- point_value(Var, Point, V).

term_value(term(Coef, Factors), Point, V) :-
    factors_product(Factors, Point, P), V is Coef * P.

factors_product([], _, 1).
factors_product([F | Fs], Point, P) :- factor_value(F, Point, V), factors_product(Fs, Point, P0), P
    ⇨ is V * P0.

value(model(Intercept, Terms), Point, Y) :-
    terms_sum(Terms, Point, S), Y is Intercept + S.

terms_sum([], _, 0).
terms_sum([T | Ts], Point, S) :- term_value(T, Point, V), terms_sum(Ts, Point, S0), S is S0 + V.

/* The contribution of a variable at a point: the terms that involve it. The
   intercept and the terms in other variables are the level the feature is
   measured against; an adjustment never depends on them. */

involves(term(_, Factors), Var) :- mr_member(F, Factors), factor_var(F, Var), !.
factor_var(hinge(V, _), V). factor_var(rhinge(V, _), V). factor_var(linear(V), V).

contribution(model(_, Terms), Var, Point, C) :-
    findall(V, ( mr_member(T, Terms), involves(T, Var), term_value(T, Point, V) ), Vs),
    mr_sum(Vs, C).

/* ===== */
/* 2. Rates (slopes) */
/* ===== */

/* d/dVar of a term = Coef * (slope of the factor in Var) * (product of the
   other factors' values). A hinge is active strictly above its knot, a
   reflected hinge strictly below; at the knot itself the slope is taken from
   the right, which is the convention of the rate table below. */

factor_slope(hinge(Var, T), Var, Point, S) :- !, point_value(Var, Point, X), ( X >= T -> S = 1 ; S
    ⇨ = 0 ).
factor_slope(rhinge(Var, T), Var, Point, S) :- !, point_value(Var, Point, X), ( X < T -> S = -1 ; S
    ⇨ = 0 ).
factor_slope(linear(Var), Var, _, 1) :- !.
factor_slope(_, _, _, 0).

term_slope(term(Coef, Factors), Var, Point, S) :-
    term_slope_(Factors, Var, Point, [], Coef, S).

term_slope_([], _, _, _, 0).
term_slope_([F | Fs], Var, Point, Seen, Coef, S) :-
    ( factor_var(F, Var) ->
        factor_slope(F, Var, Point, S1),
        mr_append(Seen, Fs, Others), factors_product(Others, Point, P),
        S1 is Coef * S1 * P
    ; S1 = 0 ),

```

```

    term_slope(Fs, Var, Point, [F | Seen], Coef, S0),
    S is S0 + S1.

rate(model(_, Terms), Var, Point, R) :-
    findall(S, ( mr_member(T, Terms), term_slope(T, Var, Point, S) ), Ss),
    mr_sum(Ss, R).

/* ===== */
/* 3. Knots, ranges and the rate table */
/* ===== */

knots(model(_, Terms), Var, Knots) :-
    findall(K, ( mr_member(term(_, Fs), Terms), mr_member(F, Fs), knot_of(F, Var, K) ), Ks),
    sort(Ks, Knots).

knot_of(hinge(Var, K), Var, K).
knot_of(rhinge(Var, K), Var, K).

/* One row per range between consecutive knots, the rate measured at a point
   inside the range (the midpoint, or one unit past the last knot). */

rate_table(Model, Var, Point, Rows) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    bounds(Knots, Bounds),
    rows(Bounds, Model, Var, Point, Rows).

bounds([], [minus_inf-plus_inf]).
bounds([K | Ks], [minus_inf-K | Rest]) :- bounds_(K, Ks, Rest).
bounds_(K, [], [K-plus_inf]).
bounds_(K, [K2 | Ks], [K-K2 | Rest]) :- bounds_(K2, Ks, Rest).

/* The table over the observed data only. A hinge's algebra runs to infinity
   on one side; the sales do not. Rates beyond the smallest and largest
   observed quantity are extrapolation, so the report clamps the end rows to
   the data range and drops any row that lies wholly outside it. */

rate_table(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), Rows) :-
    rate_table(Model, Var, Point, Rows0),
    clamp_rows(Rows0, DLo, DHi, Rows).

clamp_rows([], _, _, []).
clamp_rows([range(Lo, Hi, R) | Rs], DLo, DHi, Out) :-
    clamp_lo(Lo, DLo, Lo1), clamp_hi(Hi, DHi, Hi1),
    ( Lo1 < Hi1 -> Out = [range(Lo1, Hi1, R) | Rest] ; Out = Rest ),
    clamp_rows(Rs, DLo, DHi, Rest).

clamp_lo(minus_inf, DLo, DLo) :- !.
clamp_lo(Lo, DLo, X) :- ( Lo < DLo -> X = DLo ; X = Lo ).
clamp_hi(plus_inf, DHi, DHi) :- !.
clamp_hi(Hi, DHi, X) :- ( Hi > DHi -> X = DHi ; X = Hi ).

rows([], _, _, _, []).
rows([Lo-Hi | Bs], Model, Var, Point, [range(Lo, Hi, R) | Rows]) :-
    probe(Lo, Hi, X), set_point(Var, X, Point, P), rate(Model, Var, P, R),
    rows(Bs, Model, Var, Point, Rows).

probe(minus_inf, plus_inf, 0) :- !.
probe(minus_inf, Hi, X) :- !, X is Hi - 1.
probe(Lo, plus_inf, X) :- !, X is Lo + 1.
probe(Lo, Hi, X) :- X is (Lo + Hi) / 2.

```

```

set_point(Var, X, Point, [Var = X | Rest]) :- mr_delete_var(Point, Var, Rest).

knot_values(Model, Var, Point, Pairs) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    findall(K-Y, ( mr_member(K, Knots), set_point(Var, K, Point, P), value(Model, P, Y) ), Pairs).

/* ===== */
/* 4. Adjustments and their explanation */
/* ===== */

adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A) :-
    set_point(Var, CompQ, Point, PC), set_point(Var, SubjQ, Point, PS),
    value(Model, PC, YC), value(Model, PS, YS), A is YS - YC.

/* The path from the comparable's quantity to the subject's, cut at every knot
   between them; each piece is a width at a rate. Going down (subject smaller
   than comparable) the widths are negative, so the amounts are, and the sum
   is still the adjustment as defined: added to the comparable. */

segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs) :-
    knots(Model, Var, Knots),
    Lo is min(CompQ, SubjQ), Hi is max(CompQ, SubjQ),
    findall(K, ( mr_member(K, Knots), K > Lo, K < Hi ), Inner),
    mr_append([Lo | Inner], [Hi], Cuts),
    ( SubjQ >= CompQ -> Dir = 1 ; Dir = -1 ),
    pieces(Cuts, Model, Var, Point, Dir, Segs).

pieces([_], _, _, _, _, []) :- !.
pieces([A, B | Cs], Model, Var, Point, Dir, [seg(A, B, R, W, Amt) | Segs]) :-
    probe(A, B, X), set_point(Var, X, Point, P), rate(Model, Var, P, R),
    W is Dir * (B - A), Amt is R * W,
    pieces([B | Cs], Model, Var, Point, Dir, Segs).

/* The pair's secant rate. Between two quantities the only single rate
   consistent with the MARS contributions is the chord, adjustment over
   width: the model's rates averaged by the width of each range crossed. An
   ordinary regression, one rate for the feature, must serve every pair with
   one number and so cannot reproduce these. Printed beside the
   MARS rates it shows what a single rate would have had to be for THIS
   comparable and THIS subject, and how far each range's rate departs from
   it. Undefined when the two quantities are equal. */

pair_rate(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, R) :-
    CompQ =\= SubjQ,
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A), R is A / (SubjQ - CompQ).

consistent(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) :-
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, A),
    segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs),
    findall(Amt, mr_member(seg(_, _, _, _, Amt), Segs), Amts), mr_sum(Amts, S),
    abs(S - A) < 0.000001.

/* ===== */
/* 5. Reading earth's printed coefficients */
/* ===== */

/* earth prints its model as a table, one term per line, e.g.

    (Intercept)      10
    h(x-2)           3
    h(5-x)          -1.5

```

```

h(x-8)          0.8
h(x-2)*h(y-3)   0.4
x                1.2

parse_earth/2 takes that table as one atom (lines separated by newline
characters) and returns the model. Whitespace is free; a coefficient is a
decimal number with an optional sign; variable names are letters, digits,
dots and underscores, as R prints them. */

parse_earth(Atom, model(Intercept, Terms)) :-
    atom_chars(Atom, Chars), split_lines(Chars, Lines),
    parse_lines(Lines, 0, Intercept, Terms).

split_lines(Chars, Lines) :- split_lines_(Chars, [], Lines).
split_lines_([], Acc, [Line]) :- mr_reverse(Acc, Line).
split_lines_(['\n' | Cs], Acc, [Line | Lines]) :- !, mr_reverse(Acc, Line), split_lines_(Cs, [],
    ↪ Lines).
split_lines_([C | Cs], Acc, Lines) :- split_lines_(Cs, [C | Acc], Lines).

parse_lines([], I, I, []).
parse_lines([L | Ls], IO, I, Terms) :-
    strip(L, S),
    ( S == [] -> parse_lines(Ls, IO, I, Terms)
    ; split_ws(S, Name, CoefChars), number_chars_safe(CoefChars, Coef),
      ( Name = ['(', 'I', 'n', 't', 'e', 'r', 'c', 'e', 'p', 't', ')'] ->
        parse_lines(Ls, Coef, I, Terms)
      ; parse_factors(Name, Factors),
        Terms = [term(Coef, Factors) | Rest], parse_lines(Ls, IO, I, Rest) ) ).

strip(L, S) :- drop_ws(L, L1), mr_reverse(L1, R1), drop_ws(R1, R2), mr_reverse(R2, S).
drop_ws([C | Cs], S) :- ws(C), !, drop_ws(Cs, S).
drop_ws(S, S).
ws(' '). ws('\t'). ws('\r').

/* the coefficient is the LAST whitespace-separated token; the name is what
   precedes it and may itself contain spaces (earth prints h(x- -3) for a
   negative knot) */
split_ws(S, Name, Coef) :-
    mr_reverse(S, R), split_ws_(R, [], Coef, NameR), % consuming the reversed line puts the
    ↪ coefficient back in order
    mr_reverse(NameR, Name0), strip(Name0, Name).
split_ws_([C | Cs], Acc, Coef, Rest) :- ws(C), !, Coef = Acc, Rest = Cs.
split_ws_([C | Cs], Acc, Coef, Rest) :- split_ws_(Cs, [C | Acc], Coef, Rest).
split_ws_([], Acc, Acc, []).

number_chars_safe(Chars, N) :-
    catch(number_chars(N, Chars), _, fail), !.
number_chars_safe(Chars, N) :- % "-.5" and ".5", which earth can print
    ( Chars = ['-', '.' | R] -> number_chars(N, ['- ', '0', '.' | R])
    ; Chars = ['.' | R] -> number_chars(N, ['0', '.' | R]) ).

/* factors are separated by '*' */
parse_factors(Chars, [F | Fs]) :-
    split_star(Chars, First, Rest), parse_factor(First, F),
    ( Rest == [] -> Fs = [] ; parse_factors(Rest, Fs) ).

split_star(Chars, First, Rest) :- split_star_(Chars, [], First, Rest).
split_star_(['*' | Cs], Acc, First, Cs) :- !, mr_reverse(Acc, First).
split_star_([C | Cs], Acc, First, Rest) :- split_star_(Cs, [C | Acc], First, Rest).
split_star_([], Acc, First, []) :- mr_reverse(Acc, First).

```

```

/* h(x-2) / h(2-x) / x -- inside the parentheses, the side that is a number
   is the knot and the other side the variable */
parse_factor(['h', '(' | Cs], F) :- !,
    mr_reverse(Cs, [' ' | RevInner]), mr_reverse(RevInner, Inner),
    split_minus(Inner, Left, Right),
    ( number_chars_safe(Right, K) -> atom_chars(Var, Left), F = hinge(Var, K)
      ; number_chars_safe(Left, K) -> atom_chars(Var, Right), F = rhinge(Var, K) ).
parse_factor(Cs, linear(Var)) :- atom_chars(Var, Cs).

/* the minus that separates the two sides is the last one not at position 0
   and not following an 'e' (so "x-2", "5-x", "gla-1500" and "h(x- -3)" all
   read); a leading '-' belongs to a negative knot */
split_minus(Chars, Left, Right) :-
    mr_length(Chars, N), N1 is N - 1,
    minus_positions(Chars, 0, Ps), mr_member(P, Ps), P > 0, P < N1,
    mr_take(P, Chars, Left0), strip(Left0, Left),
    P2 is P + 1, mr_drop(P2, Chars, Right0), strip(Right0, Right),
    Left \== [], Right \== [], !.

minus_positions([], _, []).
minus_positions(['-' | Cs], I, [I | Ps]) :- !, I1 is I + 1, minus_positions(Cs, I1, Ps).
minus_positions([_ | Cs], I, Ps) :- I1 is I + 1, minus_positions(Cs, I1, Ps).

/* ===== */
/* 6. A report */
/* ===== */

print_report(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) :-
    write('Feature: '), write(Var), nl,
    write('Rates by range:'), nl,
    rate_table(Model, Var, Point, Rows),
    print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows).

/* The same report over the observed data: print_report/6 takes data(Lo, Hi),
   the smallest and largest observed quantity of Var, and reports no rate
   outside it. */

print_report(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), CompQ, SubjQ) :-
    write('Feature: '), write(Var), nl,
    write('Rates by range (data from '), write(DLo), write(' to '), write(DHi), write('; nothing is
    ↪ reported outside it):'), nl,
    rate_table(Model, Var, Point, data(DLo, DHi), Rows),
    print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows).

print_report_(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Rows) :-
    ( mr_member(range(Lo, Hi, R), Rows), write(' '), write(Lo), write(' .. '), write(Hi), write('
    ↪ rate '), write(R), nl, fail ; true ),
    write('Fitted value at the knots (intercept and partners included):'), nl,
    knot_values(Model, Var, Point, KVs),
    ( mr_member(K-Y, KVs), write(' '), write(K), write(' '), write(Y), nl, fail ; true ),
    set_point(Var, CompQ, Point, PC), set_point(Var, SubjQ, Point, PS),
    contribution(Model, Var, PC, CC), contribution(Model, Var, PS, CS),
    write('Comparable at '), write(CompQ), write(': contribution '), write(CC), nl,
    write('Subject at '), write(SubjQ), write(': contribution '), write(CS), nl,
    segments(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Segs),
    write('Adjustment, range by range:'), nl,
    ( mr_member(seg(A, B, R2, W, Amt), Segs), write(' '), write(A), write(' .. '), write(B), write
    ↪ (' '), write(W), write(' at '), write(R2), write(' = '), write(Amt), nl, fail ; true ),
    adjustment(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, Adj),
    write('Adjustment added to the comparable: '), write(Adj), nl,
    ( pair_rate(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ, OR) ->

```

```

        write('Secant rate for the pair (one straight-line rate): '), write(OR), nl ; true ),
        ( consistent(Model, Var, Point, CompQ, SubjQ) -> write('Check: segments sum to the adjustment
        ↪.') ) ; write('CHECK FAILED') ), nl.

/* ===== */
/* 7. List helpers (own names; no library assumed) */
/* ===== */

mr_member(X, [X | _]).
mr_member(X, [_ | T]) :- mr_member(X, T).

mr_append([], L, L).
mr_append([H | T], L, [H | R]) :- mr_append(T, L, R).

mr_reverse(L, R) :- mr_reverse_(L, [], R).
mr_reverse_([], R, R).
mr_reverse_([H | T], A, R) :- mr_reverse_(T, [H | A], R).

mr_sum([], 0).
mr_sum([X | Xs], S) :- mr_sum(Xs, S0), S is S0 + X.

mr_length([], 0).
mr_length([_ | T], N) :- mr_length(T, N0), N is N0 + 1.

mr_take(0, _, []) :- !.
mr_take(N, [H | T], [H | R]) :- N1 is N - 1, mr_take(N1, T, R).

mr_drop(0, L, L) :- !.
mr_drop(N, [_ | T], R) :- N1 is N - 1, mr_drop(N1, T, R).

mr_delete_var([], _, []).
mr_delete_var([V = _ | T], V, R) :- !, mr_delete_var(T, V, R).
mr_delete_var([H | T], V, [H | R]) :- mr_delete_var(T, V, R).

```